Lausearvutus

Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse

Sügis 2008

Lausearvutuse uurimisobjektid

- Lausearvutuse põhiliseks uurimisobjektiks on *laused*, mis võivad päriğ pärineda ükskõik millisest valdkonnast.
- Liitlaused jaotatakse minimaalseteks iseseisvateks üksusteks – *lihtlauseteks* ja neid ühendavateks *grammatilisteks seosteks*.
- Tuuakse sisse sümbolid lihtlausete ja seoste tähistamiseks ning kirjutatakse vaadeldav lause üles valemina. Edasise uurimise aluseks võetakse vastav valem.

Näide

Vaatleme lauset

> *Kui planeedil on atmosfäär ja seal ei leidu vett, siis planeedil ei ole elu.*

Võtame kasutusele tähised lihtlausete märkimiseks:

$$\begin{array}{lcl} A & = & \textit{Planeedil on atmosfäär} \\ B & = & \textit{Planeedil leidub vett} \\ C & = & \textit{Planeedil on elu} \end{array}$$

Veel olgu $\neg$ eitus, & sidesõna „ja“ ning $\rightarrow$ seos „kui. . . , siis. . .“.

Vaadeldava lause kirja võime kirja panna valemiga

$$(A \mathbin{\&} \neg B) \rightarrow \neg C$$

Tõeväärtus

Lausete puhul ei huvita meid nende konkreetne sisu, vaid nende vastavus tegelikkusele. Lause tõele vastavuse määra näitab lause *tõeväärtus*.

Kõik laused peavad rahuldama järgmisi tingimusi.

1. **Välistatud kolmanda seadus.** Iga lause on kas tõene või väär.
2. **Mittevasturääkivuse seadus.** Ükski lause pole korraga tõene ja väär.

Need tingimused vastavad *klassikalisele kahevalentsele loogikale*.

Kas on lausearvutuse laused?

1. *Täna on jälle tuuline ilm.*
2. *Maakera on lapik, ta seisab kolme elevandi seljas, need omakorda seisavad hiidkilpkonna seljas, kes ujub meres.*
3. *Kui lähed neljapäeva keskööl ristteele, vilistad kolm korda, pöörad ümber vasaku õla ja lööd kannaga vastu maad, siis ilmub Vanapoiss ja küsib, mida ta võib sinu heaks teha.*
4. *Kas antiikaja geograaf Pytheas külastas oma Ultima Thule reisi ajal Saaremaad, nagu väidetakse?*
5. *Milline mehine vastupanu vaenlasele, arvestades indiaanlaste sõjariistade arenematust ja taktikalist mahajäämust!*
6. *Oo, mu arm, mine tagasi sinna, kust tulid, ära sunni mind ööd ja päevad sinu peale mõtlema, sinu kirju peitma, pidama iga hääletut astet akna taga sinu sammuks!*
7. *Tuul, torm, äike, vihm, lumi, rahe, udu, hall, tuisk.*
8. *See lause on väär.*

Lausearvutuse tehted

- Eitus $\neg$. Väljendab lause mittekehtimist.
  - *Rahvaste sõprus ei tunne piire.*
  - *Pole õige, et taevas ja maa puutuvad silmapiiri taga.*
- Konjunktsioon &. Tähendab seost „ja“.
  - *Lumi sulas ja jõgi tõusis üle kallaste.*
  - *Tulin, nägin, võitsin.*
  - *Puidutöötlemisfirma „Tamm ja Kadakas“ läks pankrotti ning ta müüdi kontsernile „Akaatsia ja Eukalüpt“.*
- Disjunktsioon $\vee$. Tähendab seost „või“ (mittevälistav).
  - *Puupakk on okslik või kirves on nüri.*
  - *Annika või Kerli on toas.*
- Implikatsioon $\rightarrow$. Tingimuslik konstruktsioon „kui ..., siis“.
  - *Teoreemist P järeldub teoreem Q.*
  - *Kui sina oled küülik, siis olen mina nahkhiir!*
- Ekvivalents $\leftrightarrow$. Väljendab seost „parajasti siis“.
  - *Hulk X on kinnine parajasti siis, kui X ühtib oma sulundiga.*

Lausete kombineerimise reeglid

Koostades lihtsamatest lausetest keerulisemaid, eeldame järgmiste tingimuste kehtivust.

- Tehteid võib teostada ükskõik milliste lausetega.
- Tehte tulemuseks saadud lause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest.

Nendest tingimustest järeldub, et lausetega tehete sooritamisel on oluline ainult lause tõeväärtus, mitte lause sisu.

Lausearvutuse valem

Suuri ladina tähti A, B, C jne nimetame *lausemuutujateks*.

Definitsioon

Lausearvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada alltoodud reeglite abil.

1. *Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem.*
2. *Kui F on lausearvutuse valem, siis ka $\neg F$ on lausearvutuse valem.*
3. *Kui F ja G on lausearvutuse valemid, siis ka $(F \& G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ ja $(F \leftrightarrow G)$ on lausearvutuse valemid.*

Osavalem ja peatehe

Kõiki antud valemi konstrueerimise käigus tekkinud valemeid nimetatakse selle valemi *osavalemiteks* ehk *alamvalemiteks*, konstrueerimise viimasel sammul kasutatud tehet aga valemi *peatehteks*.

Näiteks valemi $(((A \,\&\, \neg B) \,\&\, (C \to \neg A)) \leftrightarrow (B \vee A))$ osavalemid on

$$A, \quad B, \quad C, \quad \neg A, \quad \neg B,$$
$$(B \vee A), \quad (A \,\&\, \neg B), \quad (C \to \neg A),$$
$$((A \,\&\, \neg B) \,\&\, (C \to \neg A)).$$

Kokkulepped sulgude kohta

1. **Tehete prioriteet** kõrgemast madalamani on $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
2. **Vasakassotsiatiivsus**: kui mitme liikme konjunktsioonis või disjunktsioonis sooritatakse tehteid vasakult paremale, siis võib tehete järjekorda täpsustavatest sulgudest loobuda.
3. Valemi välimised sulud võib ära jätta.

Näiteks valemi

$$(((A \,\&\, \neg B) \,\&\, (C \rightarrow \neg A)) \leftrightarrow (B \vee A))$$

võime kirjutada ülevaatlikumal kujul

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, (C \rightarrow \neg A) \leftrightarrow B \vee A$$

Väärtustus

- Kui lausemuutuja A on tõene, siis kirjutame $A = 1$; kui lausemuutuja A on väär, siis kirjutame $A = 0$;
- Kui omistame korraga tõeväärtused mitmele lausemuutujale, siis seda tõeväärtuste komplekti nimetame *väärtustuseks*.
- Näiteks muutujate A, B, C üks võimalik väärtustus on $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ ehk $(1, 0, 1)$.

Valemi tõeväärtus

Definitsioon

Lausearvutuse valemi F *tõeväärtus etteantud väärtustusel leitakse järgmiste reeglite abil.*

1. *Kui* $F = \neg G$, *siis* $F = 1$ *parajasti siis, kui* $G = 0$.
2. *Kui* $F = G \mathbin{\&} H$, *siis* $F = 1$ *parajasti siis, kui* $F = 1$ *ja* $G = 1$.
3. *Kui* $F = G \vee H$, *siis* $F = 1$ *parajasti siis, kui* $F = 1$ *või* $G = 1$.
4. *Kui* $F = G \rightarrow H$, *siis* $F = 1$ *parajasti siis, kui* $F = 0$ *või* $G = 1$.
5. *Kui* $F = G \leftrightarrow H$, *siis* $F = 1$ *parajasti siis, kui* $F = 1$ *ja* $G = 1$ *või* $F = 0$ *ja* $G = 0$.

Põhitehete tõeväärtustabelid

- Eitus

F	$\neg F$
1	0
0	1

- Konjunktsioon, disjunktsioon, implikatsioon, ekvivalents

F	G	$F \,\&\, G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Näide

Arvutada valemi $A \,\&\, \neg B \,\&\, (C \to \neg A) \leftrightarrow B \vee A$ *tõeväärtus muutujate väärtustusel* $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$.

Kõigepealt

$$\neg B = 1, \qquad \neg A = 0 \qquad \text{ja} \qquad B \vee A = 1.$$

Edasi saame

$$A \,\&\, \neg B = 1 \qquad \text{ja} \qquad C \to \neg A = 0.$$

Seejärel

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, (C \to \neg A) = 0$$

ning lõpuks

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, (C \to \neg A) \leftrightarrow B \vee A = 0.$$

Valemi tõeväärtustabel

Tabeli vasakus pooles on muutujate kõik väärtustused. Paremas pooles on tehte tulemus kirjutatud vastava tehte veergu.

			4	2	6	5	1	7	3
A	B	C	$A\ \&$	$\neg B$	$\&\ (C$	$\longrightarrow$	$\neg A)$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Kogu valemi tõeväärtused saame peatehtele vastavast veerust.

Samaselt tõene ja samaselt väär valem

Definitsioon

Lausearvutuse valemit F nimetatakse

- ***samaselt tõeseks**, kui ta on igal väärtustusel tõene;*
- ***samaselt vääraks**, kui ta on igal väärtustusel väär.*

Näiteks valem $A \vee \neg A$ on samaselt tõene (vastab välisstatud kolmanda seadusele). Valem $A \,\&\, \neg A$ on samaselt väär (vastab mittevasturääkivuse seadusele).

- Samaselt tõesed valemid väljendavad üldkehtivaid loogikaseadusi.
- Samaselt tõesed valemid ei sisalda informatsiooni.

Samaselt tõesuse ja vääruse kontrollimine

Samaselt tõese valemi tõeväärtuste veerg sisaldab ainult tõeseid tõeväärtusi.

			1		9		3	2		10	4		5		11	6		8	7
A	B	A	$\&$	B	$\vee$	A	$\&$	$\neg$	B	$\vee$	$\neg$	A	$\&$	B	$\vee$	$\neg$	A	$\&$	$\neg$ B
1	1		1		1		0	0		1	0		0		1	0		0	0
1	0		0		1		1	1		1	0		0		1	0		0	1
0	1		0		0		0	0		1	1		1		1	1		0	0
0	0		0		0		0	1		0	1		0		1	1		1	1

Samaselt tõese valemi tõeväärtuste veerg sisaldab ainult vääri tõeväärtusi.

Kehtestatav valem

Definitsioon

Lausearvutuse valemit F nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene.

- Iga samaselt tõene valem on ka kehtestatav.
- Kui valem ei ole kehtestatav, siis ta on samaselt väär.

Seosed valemiklasside vahel

Teoreem

Valem F on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ on samaselt väär.

Teoreem

Valem F on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ ei ole samaselt tõene.

samaselt väärad valemid	kehtestatavad, kuid mitte samaselt tõesed valemid	samaselt tõesed valemid

Tõesuspuu

- Puu juureks on uuritav valem koos kontrollitava tõeväärtusega.
- Tükeldame valemi järkjärgult osadeks, kirjutades osavalemid koos nende tõeväärtustega eelnevate valemite alla.
- Kui osavalemitele sobivaid tõeväärtusvariante on mitu, siis tekib puus hargnemine.
- Analüüs on lõppenud, kui igas harus on kas kõik valemid tükeldatud lausemuutujateks (*lõpetatud haru*) või seal esineb mingi valem nii tõesena kui väärana (*vastuoluline haru*).

Näide

Teha kindlaks, kas valem $\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)$ *on samaselt tõene.*

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A) = 0} \\
\multicolumn{4}{c}{|} \\
\multicolumn{4}{c}{\neg(A \to B) = 0} \\
\multicolumn{4}{c}{|} \\
\multicolumn{4}{c}{\neg(B \to A) = 0} \\
\multicolumn{4}{c}{|} \\
\multicolumn{4}{c}{A \to B = 1} \\
\multicolumn{4}{c}{|} \\
\multicolumn{4}{c}{B \to A = 1} \\
\multicolumn{2}{c}{A = 0} & \multicolumn{2}{c}{B = 1} \\
B = 0 & A = 1 & B = 0 & A = 1 \\
 & \times & \times &
\end{array}
$$

Järelikult valem ei ole samaselt tõene, vaid ta on väär väärtustustel $A = 0$, $B = 0$ ja $A = 1$, $B = 1$

Tõesuspuu elementaarsammud

- Eitus:

$$
\begin{array}{c} \neg F = 1 \\ | \\ F = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \neg F = 0 \\ | \\ F = 1 \end{array}
$$

- Konjunktsioon ja disjunktsioon:

$$
\begin{array}{c} F \mathbin{\&} G = 1 \\ | \\ F = 1 \\ | \\ G = 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & F \mathbin{\&} G = 0 & \\ / & & \backslash \\ F = 0 & & G = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & F \vee G = 1 & \\ / & & \backslash \\ F = 1 & & G = 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} F \vee G = 0 \\ | \\ F = 0 \\ | \\ G = 0 \end{array}
$$

- Implikatsioon ja ekvivalents:

$$
\begin{array}{ccc} & F \to G = 1 & \\ / & & \backslash \\ F = 0 & & G = 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} F \to G = 0 \\ | \\ F = 1 \\ | \\ G = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & F \leftrightarrow G = 1 & \\ / & & \backslash \\ F = 1 & & F = 0 \\ | & & | \\ G = 1 & & G = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & F \leftrightarrow G = 0 & \\ / & & \backslash \\ F = 1 & & F = 0 \\ | & & | \\ G = 0 & & G = 1 \end{array}
$$

Järeldumine

Järeldumine on olukord, kus mingi lause loetakse tõeseks, viidates mingite teiste lausete tõesusele. Järeldumine võib aset leida mitmel põhjusel.

1. Kui täna on 1. märts, siis homme on 2. märts
2. Täna on 1. märts
3. Homme on 2. märts

Lausetest 1 ja 2 järeldub lause 3.

1. Kõik inimesed on Aadama järglased
2. Peeter on inimene
3. Peeter on Aadama järglane

Lausetest 1 ja 2 järeldub samuti lause 3, kuid kõik kolm lauset on lihtlaused (ja lausearvutuse mõistes üksteisest sõltumatud).

Järeldumise definitsioon

Definitsioon

Ütleme, et valemitest F_1, F_2, ..., F_n *järeldub valem* G, *kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel* F_1, F_2, ..., F_n *on tõesed, on ka* G *tõene.*

Asjaolu, et valemitest F_1, F_2, ..., F_n järeldub valem G, tähistatakse kirjutisega

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models G.$$

Järeldumise kontrollimine

Järeldumise kontrollimine tõeväärtustabeli abil: valime tõeväärtustabelist välja read, milles valemid $F_1, F_2, \ldots, F_n$ on kõik tõesed, ja selgitame, kas nendes ridades on ka valem G tõene.

Teine võimalus on kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem

Valemitest $F_1, F_2, \ldots, F_n$ järeldub valem G parajasti siis, kui valem $F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \rightarrow G$ on samaselt tõene.

Näide

Tõestada, et valemitest $A \to B$ *ja* $B \to C$ *järeldub valem* $A \to C$.

A	B	C	$(A \to B)$	$\&$	$(B \to C)$	$\to$	$(A \to C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Näide

On teada järgmised faktid.

- Kui Mihkel köhib ja on näost valge, siis ta kas on haige või on käinud nurga taga suitsu tegemas.
- Kui Mihkel pole käinud suitsu tegemas ja ikkagi köhib või on näost valge, siis ta on haige.
- Kui Mihkel on haige, siis ta köhib, aga pole näost valge.

Pärast vahetundi klassi tulles oli Mihkel näost täiesti valge. Kas sellest järeldub, et ta käis nurga taga suitsu tegemas?

Samaväärsus

Definitsioon

Valemeid F ja G nimetatakse samaväärseteks, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel.

Tähistatakse $F \equiv G$.

Näiteks valemid $\neg(A \,\&\, B)$ ja $\neg A \vee \neg B$ on samaväärsed:

A	B	$\neg$	$(A \,\&\, B)$	$\neg A$	$\vee$	$\neg B$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1

Samaväärsuse tingimused

Teoreem

Valemid F ja G on samaväärsed parajasti siis, kui valemist F järeldub valem G ja valemist G järeldub valem F.

Teoreem

Valemid F ja G on samaväärsed parajasti siis, kui valem $F \leftrightarrow G$ on samaselt tõene.

Lausearvutuse põhisamaväärsused (I)

1. Idempotentsuse seadused:
$$F \mathbin{\&} F \equiv F, \qquad F \vee F \equiv F.$$
2. Kommutatiivsuse seadused:
$$F \mathbin{\&} G \equiv G \mathbin{\&} F, \qquad F \vee G \equiv G \vee F.$$
3. Assotsiatiivsuse seadused:
$$(F \mathbin{\&} G) \mathbin{\&} H \equiv F \mathbin{\&} (G \mathbin{\&} H), \quad (F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H).$$
4. Distributiivsuse seadused:
$$F \mathbin{\&} (G \vee H) \equiv F \mathbin{\&} G \vee F \mathbin{\&} H,$$
$$F \vee G \mathbin{\&} H \equiv (F \vee G) \mathbin{\&} (F \vee H).$$
5. Neelamisseadused:
$$F \mathbin{\&} (F \vee G) \equiv F, \qquad F \vee F \mathbin{\&} G \equiv F.$$

Lausearvutuse põhisamaväärsused (II)

6. De Morgani seadused:

$$\neg(F \,\&\, G) \equiv \neg F \vee \neg G, \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \,\&\, \neg G.$$

7. Kahekordse eituse seadus:

$$\neg\neg F \equiv F.$$

8. Liikmete elimineerimise reeglid:

$$F \,\&\, \mathcal{T} \equiv F, \quad F \,\&\, \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}, \quad F \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}, \quad F \vee \mathcal{V} \equiv F.$$

9. Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:

$$F \to G \equiv \neg(F \,\&\, \neg G), \qquad F \to G \equiv \neg F \vee G.$$

10. Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:

$$F \,\&\, G \equiv \neg(F \to \neg G), \qquad F \vee G \equiv \neg F \to G.$$

11. Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu:

$$F \leftrightarrow G \equiv F \,\&\, G \vee \neg F \,\&\, \neg G, \quad F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \,\&\, (G \to F).$$

Valemite teisendamine

- Analoogiliselt algebraga võib lausearvutuse samaväärsusi kasutada lausearvutuse valemite teisendamiseks ja lihtsustamiseks.
- Üks teisendussamm tähendab valemi või selle osa asendamist temaga samaväärse valemiga.
- Lausearvutuse valemite teisendamine põhineb **substitutsiooniprintsiibil**: kui valemis F asendada osavalem F_1 temaga samaväärse valemiga F_2, siis saadav valem F' on samaväärne valemiga F.

Näide. Lihtsustada valem $\neg A \vee B \to A \,\&\, B$.

Normaalkujude eesmärgid

Normaalkuju on objekti ühtne ja (tavaliselt) lihtne esitusviis, mis võetakse edasise uurimise aluseks.

- Teoreetilises uurimises kasutatakse normaalkujusid tõestuste lihtsustamiseks: võib eeldada, et uuritav objekt on juba algusest peale normaalkujul.
- Vajalikke objekte on tihti lihtsam konstrueerida normaalkuju järgi ja teisendada siis sobivale kujule.

Literaal

- **Literaal** on lausemuutuja või tema eitus.
- Puhast lausemuutujat nimetame **positiivseks literaaliks**, eitusega lausemuutujat **negatiivseks literaaliks**. Ühest lausemuutujast saab seega koostada kaks literaali.
- Näiteks A, B, C on positiivsed literaalid, $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ on negatiivsed literaalid.
- Lausemuutujateks, millest literaalid koostatakse, on tavaliselt teatava valemi kõigi muutujate hulk.

Täielik elementaarkonjunktsioon

- Olgu vaatluse all lausemuutujate komplekt $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Moodustame igast muutujast literaali (lisades või jättes lisamata eituse): $L_1, L_2, \ldots, L_n$.
- Valemit

$$L_1 \mathbin{\&} L_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} L_n$$

nimetatakse **täielikuks elementaarkonjunktsiooniks** (TEK).

Näiteks lausemuutujatest A, B, C koostatud valem $A \mathbin{\&} \neg B \mathbin{\&} \neg C$ on täielik elementaarkonjunktsioon.

Täielik disjunktiivne normaalkuju

Definitsioon

Lausearvutuse valemi F täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks (TDNK) nimetatakse valemiga F samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni.

„Erinevad“ tähendab, et elementaarkonjunktsioonid koosnevad erinevatest literaalikomplektidest.

Näiteks valem

$$A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} \neg C \vee \neg A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C \vee \neg A \mathbin{\&} \neg B \mathbin{\&} C$$

on täielikul disjunktiivsel normaalkujul.

Täielik konjunktiivne normaalkuju

- **Täielik elementaardisjunktsioon** (TED) on literaalidest L_1, L_2, ..., L_n koostatud valem

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n.$$

- Valemi F **täielik konjunktiivne normaalkuju** (TKNK) on valemiga F samaväärne valem, mis kujutab endast erinevate täielike elementaardisjunktsioonide konjunktsiooni.

Näiteks valem

$$(A \vee B \vee \neg C) \,\&\, (\neg A \vee B \vee C) \,\&\, (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

on täielikul konjunktiivsel normaalkujul.

TDNK ja TKNK on teineteisega duaalsed mõisted.

TDNK tõesuspiirkond

- Valem

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \,\&\, D \vee A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, \neg D$$

  on tõene parajasti kahel väärtustusel: esimene liige väärtustusel $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$ ja teine liige väärtustusel $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$.

- Üldiselt, valem

$$A_1^{\alpha_{11}} \,\&\, A_2^{\alpha_{12}} \,\&\, \dots \,\&\, A_n^{\alpha_{1n}} \vee A_1^{\alpha_{21}} \,\&\, A_2^{\alpha_{22}} \,\&\, \dots \,\&\, A_n^{\alpha_{2n}} \vee \dots$$
$$\dots \vee A_1^{\alpha_{m1}} \,\&\, A_2^{\alpha_{m2}} \,\&\, \dots \,\&\, A_n^{\alpha_{mn}}$$

  on tõene parajasti m väärtustusel $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n})$, $\dots$, $(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$.

TDNK leidmine

Valemi F igale tõesele väärtustusele vastab üks TDNK liige.

A	B	C	$A \to \neg C \leftrightarrow A \,\&\, B \vee (\neg A \,\&\, C)$							Liige
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	$A \,\&\, B \,\&\, \neg C$
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	$A \,\&\, \neg B \,\&\, C$
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	$\neg A \,\&\, B \,\&\, C$
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	$\neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	

Valemi TDNK on

$$A \,\&\, B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, B \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C.$$

TKNK vääruspiirkond

- Valem

$$(A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \,\&\, (A \vee B \vee C \vee \neg D)$$

on väär parajasti kahel väärtustusel: esimene liige väärtustusel $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$ ja teine liige väärtustusel $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$.

- Üldiselt, valem

$$(A_1^{\alpha_{11}} \vee A_2^{\alpha_{12}} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_{1n}}) \,\&\, (A_1^{\alpha_{21}} \vee A_2^{\alpha_{22}} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_{2n}}) \,\&\, \ldots$$
$$\ldots \,\&\, (A_1^{\alpha_{m1}} \vee A_2^{\alpha_{m2}} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_{mn}})$$

on väär parajasti m väärtustusel $(\neg\alpha_{11}, \neg\alpha_{12}, \ldots, \neg\alpha_{1n})$, $(\neg\alpha_{21}, \neg\alpha_{22}, \ldots, \neg\alpha_{2n})$, $\ldots$, $(\neg\alpha_{m1}, \neg\alpha_{m2}, \ldots, \neg\alpha_{mn})$.

TKNK leidmine

Valemi F igale väärale väärtustusele vastab üks TKNK liige. Literaalide märgid on muutujate tõeväärtustega võrreldes vastupidised.

A	B	C	$A \to \neg C \leftrightarrow A \,\&\, B \vee (\neg A \,\&\, C)$							Liige
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\neg A \vee B \vee C$
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	$A \vee \neg B \vee C$
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	$A \vee B \vee C$

Valemi TKNK on

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \,\&\, (\neg A \vee B \vee C) \,\&\, (A \vee \neg B \vee C) \,\&\, (A \vee B \vee C)$$

Seos TDNK ja TKNK vahel

Kui valemi F täielik disjunktiivne normaalkuju on

$$\begin{aligned} F \equiv & L_{11} \,\&\, L_{12} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{1n} \vee \\ & L_{21} \,\&\, L_{22} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{2n} \vee \\ & \ldots \vee \\ & L_{m1} \,\&\, L_{m2} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{mn}, \end{aligned}$$

siis valemi $\neg F$ täieliku konjunktiivse normaalkuju saab leida valemist

$$\begin{aligned} \neg F \equiv & (\neg L_{11} \vee \neg L_{12} \vee \ldots \vee \neg L_{1n}) \,\& \\ & (\neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \ldots \vee \neg L_{2n}) \,\& \\ & \ldots \,\& \\ & (\neg L_{m1} \vee \neg L_{m2} \vee \ldots \vee \neg L_{mn}), \end{aligned}$$

jättes lausemuutujate eest ära kahekordsed eitused.

Normaalkujude olemasolu

Täieliku disjunktiivse normaalkuju olemasolu.

- Kui valem on kehtestatav, siis tal leidub TDNK, mis on liikmete järjekorra täpsuseni üheselt määratud.
- Kui valem on samaselt väär, siis tal TDNK-d ei leidu, sest TDNK on alati vähemalt ühel väärtustusel tõene.

Täieliku konjunktiivse normaalkuju olemasolu.

- Kui valem ei ole samaselt tõene, siis tal leidub TKNK, mis on liikmete järjekorra täpsuseni üheselt määratud.
- Kui valem on samaselt tõene, siis tal TKNK-d ei leidu, sest TKNK on alati vähemalt ühel väärtustusel väär.

Mõnikord loetakse ühtsuse mõttes, et tühi TDNK on samaselt väär ja tühi TKNK on samaselt tõene.

Üldised normaalkujud

Üldine normaalkuju on täieliku normaalkujuga võrreldes sageli lühem, samal ajal on valemi tõesuspiirkond (vääruspiirkond) tema järgi ikka lihtsasti välja loetav.

- Lausemuutujatest $A_1, A_2, \ldots, A_n$ moodustatud literaalide konjunktsiooni $L_{i_1} \,\&\, L_{i_2} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{i_k}$ nimetatakse **elementaarkonjunktsiooniks** ehk **konjunktiks**.
- Valemiga F samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni, nimetatakse valemi F **disjunktiivseks normaalkujuks** (DNK).
- Analoogiliselt defineeritakse **elementaardisjunktsioon** ehk **disjunkt** ning **konjunktiivne normaalkuju** (KNK).

Võrreldes täieliku normaalkujuga loobutakse siin tingimusest, et normaalkuju iga liige peab sisaldama kõiki lausemuutujaid.

DNK tõesuspiirkond

- Elementaarkonjunktsioon

$$A_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \,\&\, A_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \,\&\, \dots \,\&\, A_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

  on tõene parajasti siis, kui $A_{i_1} = \alpha_{i_1}$, $A_{i_2} = \alpha_{i_2}$, ..., $A_{i_k} = \alpha_{i_k}$.
- See fikseerib k lausemuutuja väärtused, ülejäänud $n - k$ muutujat võivad olla ükskõik millise väärtusega. Seega on selline elementaarkonjunktsioon tõene 2^{n-k} väärtustusel.
- DNK erinevad liikmed võivad olla tõesed mingil ühel ja samal väärtustusel. Seetõttu võib valemil leiduda mitu erinevad DNK-d. Näiteks valemi $F = (A \leftrightarrow C) \to \neg A \,\&\, C$ puhul

$$\begin{aligned} F &\equiv A \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, C \vee B \,\&\, \neg C \\ &\equiv A \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, B \vee \neg A \,\&\, C \end{aligned}$$

Teisendamine DNK-le

Normaalkujule teisendamine võimaldab valemi tõesuspiirkonda analüüsida ka suurema arvu muutujate korral. Lisaks on selline teisendamine lihtsasti automatiseeritav.

Olgu antud valem F. Leiame selle valemi DNK.

1. Elimineerida implikatsioonid ja ekvivalentsid.
2. Viia eitused vahetult lausemuutujate ette.
3. Viia konjunktsioonid disjunktsioonidest sügavamale.
4. Korrastada liikmed.

Kui eesmärgiks on TDNK, siis tuleb liikmed teisendada täielikeks elementaarkonjunktsioonideks.

5. Lisada igale liikmele puuduvad muutujad ja avada sulud.
6. Eemaldada täielike elementaarkonjunktsioonide korduvad eksemplarid.

Konjunktiivne normaalkuju

Konjunktsiooni ja disjunktsiooni duaalsuse põhjal saab eelneva üle kanda KNK-dele, kui vahetada omavahel tehted konjunktsioon ja disjunktsioon ning samuti tõeväärtused tõene ja väär.

- Elementaardisjunktsioon

$$A_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee A_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \vee \ldots \vee A_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

  on väär parajasti siis, kui $A_{i_1} = \neg\alpha_{i_1}$, $A_{i_2} = \neg\alpha_{i_2}$, ..., $A_{i_k} = \neg\alpha_{i_k}$.
- Selline elementaardisjunktsioon on väär 2^{n-k} väärtustusel.
- Erinevate elementaardisjunktsioonide vääruspiirkonnad võivad kattuda ning valemil võib leiduda mitu erinevat konjunktiivset normaalkuju.
- Valemi teisendamisel konjunktiivsele normaalkujule tuleb rakendada disjunktiivse normaalkujuga võrreldes duaalseid samaväärsusi.

Minimaalne normaalkuju

Definitsioon

Valemi F minimaalseks disjunktiivseks normaalkujuks (MDNK) nimetatakse valemi F disjunktiivset normaalkuju, mis sisaldab kõige vähem literaale.

Normaalkuju ebaefektiivsuse põhjusi:

- liikmete kattumine, näiteks

$$A \,\&\, \neg B \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \equiv A \,\&\, \neg B;$$

- ühilduvad liikmed, näiteks

$$A \,\&\, B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \equiv A \,\&\, \neg C.$$

Need pole siiski ainsad põhjused, näiteks ei saa nendega leida valemi

$F = A \,\&\, B \vee A \,\&\, B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, C \vee A \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, B \,\&\, \neg C$

minimaalset disjunktiivset normaalkuju

$$F \equiv B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, C.$$

Minimaalse normaalkuju leidmiseks on palju nii algebralisi kui graafilisi meetodeid. Üks sagedamini kasutatavaid on Karnaugh' diagramm (selle algebraline variant kannab nime Quine-McCluskey meetod).

Sobib väiksema muutujate arvuga valemi minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmiseks.

Kahe muutujaga tabel:

	B	$\neg B$
A		
$\neg A$		

Kolme muutujaga tabel:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A				
$\neg A$				
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Nelja muutujaga tabel:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A					D
A					$\neg D$
$\neg A$					$\neg D$
$\neg A$					D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Näide

Leida valemi $(C \to A) \,\&\, (A \to \neg B)$ minimaalne disjunktiivne normaalkuju.

Valem on tõene väärtustustel $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$. Koostame Karnaugh' diagrammi ja märgime vastavad lahtrid:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A			1	1
$\neg A$		1	1	
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Näide

Leida valemi $(C \to A) \,\&\, (A \to \neg B)$ minimaalne disjunktiivne normaalkuju.

Valem on tõene väärtustustel $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$. Koostame Karnaugh' diagrammi ja märgime vastavad lahtrid:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A			1	1
$\neg A$		1	1	
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Valemi MDNK on $A \,\&\, \neg B \vee \neg A \,\&\, \neg C$.

Leida järgmise diagrammiga määratud valemi minimaalne disjunktiivne normaalkuju:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A			1	1	D
A					$\neg D$
$\neg A$				1	$\neg D$
$\neg A$	1		1	1	D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Näide 2

Leida järgmise diagrammiga määratud valemi minimaalne disjunktiivne normaalkuju:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A			1	1	D
A					$\neg D$
$\neg A$				1	$\neg D$
$\neg A$	1		1	1	D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Valemi MDNK on

$$\neg B \mathbin{\&} D \vee \neg A \mathbin{\&} C \mathbin{\&} D \vee \neg A \mathbin{\&} \neg B \mathbin{\&} C.$$

Aksiomaatilise käsitluse skeem

1. Fikseeritakse mingi hulk antud teoorias uuritavaid objekte, nendel defineeritud funktsioone ja relatsioone, tuuakse sisse sümboolika nende tähistamiseks.
2. Teatud hulk väiteid loetakse tõeseks ilma tõestuseta, neid väiteid nimetatakse selle teooria aksioomideks.
3. Teooria arendamine seisneb „teoreemide tõestamises“. Teoreemideks loetakse väiteid, mida saab tõestada „ainult aksioome kasutades“.

Väidete mugavamaks sõnastamiseks võidakse olemasolevate mõistete baasil defineerida uusi.

Ajalugu

- Aksiomaatilise meetodi alusepanija on Eukleides (u 325 – u 265 e.m.a), kes süstematiseeris oma teoses Elemendid sellisel viisil tolleaegse matemaatika. Aksioome pidas ta ilmseteks tõdedeks.
- 19. sajandi alguses tekkis Lobat0sevski, Bolyai ja Gaussi töödega mitteeukleidiline geomeetria. Selle loomine näitas, et aksioome võib mõista lihtsalt kui eeldusi.
- Russell ja Whitehead formaliseerisid oma teoses Principia Mathematica (1910–1913) suure osa matemaatika alustest.
- Bourbaki kasutas 20. sajandi keskel aksiomaatilist meetodit matemaatika süstematiseerimiseks, tulemuseks oli 30 köidet koguteost Éléments de mathématique.
- Alates 1980. aastate lõpust on arendatud matemaatika formaliseerimist arvutil, nt interaktiivsed teoreemitõestajad HOL, IMPS, Isabelle, Mizar, Nqthm, Nuprl, PVS, nende jaoks on loodud palju standardteoreemide teeke.

Aksiomaatilise meetodi rakendamine

- **Teooriate ülesehitamine**, näiteks
  - algebras rühma-, ringi-, võre-, vektorruumide jt teooria,
  - funktsionaalanalüüsis meetriliste, topoloogiliste, Hilberti, Banachi jt ruumide teooria,
  - geomeetria alused,
  - matemaatika alused: hulgateooria, formaalne aritmeetika.
- **Teooriate korrastamine**: elektrodünaamika, kvantmehaanika.
- **Tegevusvooskeemide korrektsuse tõestamine**: programmide verifitseerimine, krüptograafilised protokollid jne.

Kasu aksiomatiseerimisest.

- Selgus: ebaolulised sisulised detailid jäetakse kõrvale.
- Üldisus: teoreemid kehtivad igas olukorras, kus kehtivad teooria aksioomid.
- Automaattõestamine: aksioomidest järeldumise kontrolli võib anda arvutile.

Mis on aksioom?

Aksiomaatilise teooria ülesehitamisel tuleb leida selgus kahes olulises küsimuses: mis on aksioom ja mis on tõestus.

Aksioomide mõistmisel on mitmesuguseid lähenemisviise.

- Tavaarusaam: aksioom on väide, mis on silmnähtavalt õige.
- Matemaatikas: aksioom on definitsioon; nendega piiritletakse uuritavate objektide klass.
- Enamasti loodusteadustes: aksioom on väide, mille kehtivus on seda kindlam, mida rohkem on tema kasuks eksperimentaalset materjali.

Mis on tõestus?

Millist põhjendust võib väidete tõestamisel lugeda piisavaks?

- Kas võib kasutada väiteid, mis uuritavas valdkonnas on tõesed, aga mida pole aksioomide hulka võetud? Kuidas ära tunda, kas me selliseid väiteid kasutame?
- Välistatud kolmanda seaduse probleem: kas seni (veel) tõestamata või formuleerimata väidetel on olemas kindel tõeväärtus?
- Olemasoluteoreemide tõestamise probleem: kas on aktsepteeritav olemasoluteoreemide tõestamine ilma objekti ennast leidmata (nt vastuväitelise tõestuse teel)?

Formaalse aksiomaatilise teooria üldskeem

1. Fikseeritakse tähestik ja antakse valemi definitsioon.
2. Osa valemeid loetakse aksioomideks.
3. Fikseeritakse lõplik hulk **tuletusreegleid**

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{G},$$

   mis lubavad valemitest F_1, F_2, ..., F_n vahetult tuletada valemi G.

Definitsioon

Tuletuseks *ehk* ***formaalseks tõestuseks*** *nimetatakse valemite jada* F_1, F_2, ..., F_n, *milles iga valem on kas aksioom või saadud mingi tuletusreegliga mõnedest temale eelnevatest valemitest.*

Valemit F *nimetatakse* ***tuletatavaks****, kui leidub tuletus, mille viimane liige on valem* F.

Näide

1. Tähestik olgu $\{p, q, \text{-}\}$. Valemid olgu kõikvõimalikud sümbolijärjendid selles tähestikus.
2. Aksioomid olgu valemid kujul $xp\text{-}qx\text{-}$, kus x on suvaline mittetühi sümbolite - järjend.
3. Ainuke tuletusreegel olgu

$$\frac{xpyqz}{xpy\text{-}qz\text{-}}$$

kus x, y, z on suvalised mittetühjad sümbolite - järjendid.

Millised valemid on selles aksiomaatilises teoorias tuletatavad?

Süntaks ja semantika

- Valemi tuletuse on puhtalt süntaktiline objekt, tuletusreegli rakendamisel pole valemite tähendust vaja teada.
- Tähenduse annab valemitele semantika: semantika seab igale valemile (või ka tema komponendile) vastavusse elemendi mingist hulgast.
- Loogikat huvitavad niisugused semantikad, milles saab rääkida valemite tõeväärtustest, näiteks
  - samaselt tõesuse semantika;
  - tõeväärtus ühes konkreetses interpretatsioonis;
  - tõesus teatava interpretatsioonide klassil.

Korrektsus ja täielikkus

Definitsioon

Aksiomaatilist teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse semantika $\mathcal{S}$ suhtes

- ***korrektseks**, kui iga teoorias $\mathcal{T}$ tuletatav valem on semantikas $\mathcal{S}$ tõene;*
- ***täielikuks**, kui iga semantikas $\mathcal{S}$ tõene valem on teoorias $\mathcal{T}$ tuletatav.*

Aksiomatiseerimisel on eesmärgiks koostada valdkonna jaoks selline aksiomaatika, mis on nii korrektne kui täielik.

Kui seda ei õnnestu saavutada, siis vähemalt selline aksiomaatika, mis on korrektne.

Näide

Vaatleme järgmist aksiomaatilist teooriat.

1. Tähestik $\{\mathsf{I}, +\}$. Valemid on tähestiku kõik sellised sümbolijärjendid, mis sisaldavad täpselt ühte sümbolit $+$.
2. Ainuke aksioom on $+$.
3. Ainuke tuletusreegel on
$$\frac{*}{\mathsf{I} * \mathsf{I}},$$
kus $*$ on suvaline valem.

Milliste semantikate suhtes on see teooria korrektne ja täielik:

1. Semantika $\mathcal{S}_1$: $m+n$ tähendab $m = n$.
2. Semantika $\mathcal{S}_2$: $m+n$ tähendab $m \leqslant n$.
3. Semantika $\mathcal{S}_3$: $m+n$ tähendab $m < n$.

Näide (jätk)

Vaatleme järgmist aksiomaatilist teooriat.

1. Tähestik $\{\mathsf{I}, +\}$. Valemid on tähestiku kõik sellised sümbolijärjendid, mis sisaldavad täpselt ühte sümbolit $+$.
2. Ainuke aksioom on $+$.
3. Tuletusreeglid on

$$\frac{*}{\mathsf{I} * \mathsf{I}} \qquad\qquad \frac{*}{*\mathsf{I}}$$

   Siin tähistab $*$ suvalist valemit.

Milliste semantikate suhtes on see teooria korrektne ja täielik:

1. Semantika $\mathcal{S}_1$: $m{+}n$ tähendab $m = n$.
2. Semantika $\mathcal{S}_2$: $m{+}n$ tähendab $m \leqslant n$.
3. Semantika $\mathcal{S}_3$: $m{+}n$ tähendab $m < n$.

Sekventsiaalne lausearvutus

- Eesmärk on formuleerida lausearvutuse jaoks aksiomaatika, mis on korrektne ja täielik samaselt tõesuse semantika suhtes.
- Kasutame Gentzeni-tüüpi süsteemi, mis vastab matemaatiliste väidete tõestamisel esinevatele arutluskäikudele paremini kui ajalooliselt vanemad Hilberti-tüüpi süsteemid.

Tuletatavad objektid

- Tuletatavad objektid on **sekventsid**

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G,$$

  kus F_1, F_2, ..., F_n, G on lausearvutuse valemid, mis ei sisalda ekvivalentsi.
- Vasakpoolset osa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ nimetatakse sekventsi *eesliikmeks* ehk *antetsedendiks*, parempoolset osa G aga *tagaliikmeks* ehk *suktsedendiks*.
- Sekventsi $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ mõistame väitena, et valemitest F_1, F_2, ..., F_n järeldub valem G.
- Sekventsi eesliige võib olla ka tühi.

Aksioomid

- Aksioomid on sekventsid

$$\Gamma, F, \Delta \vdash F,$$

kus F on mingi lausearvutuse valem ning Γ ja Δ tähistavad suvalisi valemite järjendeid, mis võivad olla ka tühjad.

- Aksioomideks olevad sekventsid väljendavad „kõige ilmsemat järeldumist“: väide esineb ise juba eelduste hulgas.

Tuletusreeglid

Paremale sissetoomise reegel	Vasakule sissetoomise või paremalt eemaldamise reegel
$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \,\&\, G}\ (\vdash \&)$	$\dfrac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \,\&\, G \vdash H}\ (\& \vdash)$
$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vdash \vee)$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \vee G \vdash H}\ (\vee \vdash)$
$\dfrac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \rightarrow G}\ (\vdash \rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G}\ (\vdash \not\rightarrow)$
$\dfrac{\Gamma, F \vdash G \quad \Gamma, F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\vdash \neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}\ (\vdash \not\neg)$
$\dfrac{\Gamma, \Delta, F \vdash G}{\Gamma, F, \Delta \vdash G}\ (S \sim)$	$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (S +)$

Tuletamise käik

- Uue sekventsi tuletamiseks viidatakse tuletusreeglile ja sobivatele juba olemasolevatele sekventsidele.
- Et mitmed tuletusreeglid kasutavad kahte eeldust, võib tuletuse kirja panna puu kujul.
- Tuletust otsitakse „alt üles“: lähtume sihtsekventsist, määrame kindlaks selle eeldusteks olevad sekventsid, siis omakorda eelduste eeldused jne.
- Valmis tuletuspuud loetakse „ülevalt alla“: aksioomidest saadakse nende vahetud järeldused, siis omakorda nende järeldused jne. Tuletuspuu saab alati lineariseerida.

Näide

Tuletada järgmised sekventsid.

- $A \,\&\, (B \vee C) \vdash A \,\&\, B \vee A \,\&\, C$
- $\neg A \,\&\, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- $\vdash A \vee \neg A$

Lausearvutuse aksiomaatika omadused

Järgnevas on meie eesmärk tõestada, et lausearvutuse aksiomaatika on korrektne ja täielik. St tuletatavad on parajasti need sekventsid, mille vasakust poolest järeldub parem pool.

Definitsioon

Sekventsi $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ *valemkujuks nimetatakse valemit* $F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \rightarrow G$, *kui* $n > 0$, *ning valemit* G, *kui* $n = 0$.

Tõestatavad tulemused:

- **korrektsuse teoreem**: iga tuletatava sekventsi valemkuju on samaselt tõene;
- **täielikkuse teoreem**: iga samaselt tõese valemkujuga sekvents on tuletatav;
- **mittevasturääkivuse teoreem**: ei leidu valemit F, mille korral oleksid tuletatavad nii $\vdash F$ kui ka $\vdash \neg F$.

Korrektsuse teoreem

Teoreem

Kui sekvents $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ *on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.*

Tõestuse idee. Induktsioon tuletuspuu struktuuri järgi.

- Baas: tõestame, et aksioomide valemkujud on samaselt tõesed.
- Samm: tõestame iga reegli korral, et kui kõigi ülemiste sekventside valemkujud on mingil väärtustusel tõene, siis ka alumise sekventsi valemkuju on samal väärtustusel tõene.

Seega sekventsi samaselt tõesus kandub alates aksioomidest mööda tuletuspuud järk-järgult allapoole.

Aksioomide samaselt tõesus

Kui sekvents on aksioom, siis ta on

$$F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n \vdash F_i.$$

Selle sekventsi valemkuju on

$$F_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} F_i \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} F_n \to F_i.$$

Igal väärtustusel, kus viimase implikatsiooni vasak pool on tõene, on ka parem pool tõene. Järelikult on see valemkuju samaselt tõene.

Tõesuse ülekandumine reeglite puhul

Vaatleme konjunktsiooni paremale sissetoomise reeglit.

Eeldame, et Γ koosneb valemitest $F_1, \ldots, F_n$. Joonepealsete sekventside valemkujud on

$$F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \vdash F, \qquad F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \vdash G$$

ning joonealuse sekventsi valemkuju

$$F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \vdash F \,\&\, G.$$

Eeldame, et mingil väärtustusel on esimesed kaks valemit tõesed, ning tõestame, et sellel väärtustusel on siis ka kolmas valem tõene.

Tõestuseks võib kasutada erinevaid meetodeid, näiteks

- vahetu arutlus definitsiooni abil
- tõesuspuu
- valemite teisendamine

Mittevasturääkivuse teoreem

Definitsioon

*Aksiomaatilist teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse **vasturääkivaks**, kui leidub selline valem F, et teoorias $\mathcal{T}$ on tuletatavad sekventsid $\vdash F$ ja $\vdash \neg F$. Vastasel korral nimetatakse teooriat $\mathcal{T}$ **mittevasturääkivaks**.*

Teoreem

Sekventsiaalne lausearvutus on mittevasturääkiv.

Tõestus. Kui oleksid korraga tuletatavad $\vdash F$ ja $\vdash \neg F$, siis peaksid valemid F ja $\neg F$ olema korraga samaselt tõesed.

Teoreem

Kui valemi F tõeväärtus selles esinevate muutujate $A_1, \ldots, A_n$ väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on α, siis on tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash F^{\alpha}.$$

Näiteks valem $\neg A \vee B$ on muutujate A, B väärtustusel $(1, 0)$ väär, seega väidab teoreem, et tuletatav on sekvents

$$A, \neg B \vdash \neg(\neg A \vee B).$$

Tõestuse idee. Induktsioon valemi struktuuri järgi.

- Baas: tõestame teoreemi juhul, kui F on lausemuutuja.
- Samm: tõestame teoreemi juhtudel, kui F avaldub kujul $\neg G$, $G \,\&\, H$, $G \vee H$, $G \rightarrow H$ ning valemite G ja H korral on teoreemi kehtivus teada.

Induktsiooni baas

Olgu $F = A_1$.

- Kui $\alpha_1 = 1$, siis peab olema tuletatav sekvents $A_1 \vdash A_1$.
- Kui $\alpha_1 = 0$, siis peab olema tuletatav sekvents $\neg A_1 \vdash \neg A_1$.

Mõlemad sekventsid on tuletatavad, sest nad on aksioomid.

Samm eituse juhul

Olgu $F = \neg G$.

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F tõene, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg G$$

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F väär, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\neg G$$

Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G$$

Samm konjunktsiooni juhul

Olgu $F = G \,\&\, H$.

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F tõene, siis peab olema tuletatav sekvents

  $$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \,\&\, H$$

  Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad

  $$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \qquad \text{ja} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash H$$

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F väär, siis peab olema tuletatav sekvents

  $$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(G \,\&\, H)$$

  Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav

  $$\text{kas} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg G \qquad \text{või} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg H$$

Samm disjunktsiooni juhul

Olgu $F = G \vee H$.

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F tõene, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \vee H$$

  Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav

$$\text{kas} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \qquad \text{või} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash H$$

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on valem F väär, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(G \vee H)$$

  Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg G \qquad \text{ja} \qquad A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg H$$

Samm implikatsiooni juhul

Olgu $F = G \to H$.

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on valem F tõene, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \to H$$

Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav

$$\text{kas} \qquad A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg G \qquad \text{või} \qquad A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash H$$

- Kui väärtustusel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on valem F väär, siis peab olema tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(G \to H)$$

Induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad

$$A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \qquad \text{ja} \qquad A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg H$$

Täielikkuse teoreem

Teoreem

Kui sekventsi $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ *valemkuju on samaselt tõene, siis sekvents on tuletatav.*

Tõestuse idee.

- Vaatleme kõigepealt olukorda, kus $n = 0$, st G on samaselt tõene valem.
- Siis valemi G muutujate A_1, ..., A_n suvalise väärtustuse $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ korral saab tuletatada sekventsi

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G$$

Tõestuse idee (jätk)

- Tõestame, et siis ka suvalise väärtustuse $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ korral saab tuletada sekventsi

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash G.$$

- Nii jätkates eemaldame sekventsi eesliikmest kõik literaalid, järele jääb sekventsi $\vdash G$ tuletus.
- Vaatleme nüüd olukorda, kus $n > 0$. Siis on $F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \rightarrow G$ samaselt tõene valem, seega saab tuletada sekventsi $\vdash F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \rightarrow G$ ning edasi ka sekventsi $F_1, \ldots, F_n \vdash G$.

Kokkuvõte

- Sekventsiaalne lausearvutus on korrektne ja täielik samaselt tõesuse semantika suhtes.
- Sekventsiaalses lausearvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.
- Sekventsiaalne lausearvutus on mittevasturääkiv.