

TARTU ÜLIKOOL
Teaduskool

MATEMAATILISEST LOOGIKAST
(Lausearvutus)

Õppematerjal TÜ Teaduskooli õpilastele

Koostanud E. Mitt

TARTU 2003

1. LAUSE MÕISTE

Matemaatilise loogika ühe osa - lausearvutuse - põhiliseks mõisteks on lause. Kuid mitte iga keeleliselt korrektne lause ei ole matemaatilise loogika lause. Matemaatilises loogikas nimetatakse lauseks ainult niisugust väljendit, mille korral saab rääkida selle sisu vastavusest või mittevastavusest tegelikkusele. Kui lause sisu vastab tegelikkusele, siis nimetatakse seda lauset **tõeseks**. Kui aga lause sisu ei vasta tegelikkusele, siis nimetatakse seda lauset **vääraks**. Lause tegelikkusele vastavuse määr on lause **tõeväärtus**. Iga lause on kas tõene või väär, kolmandat võimalust ei ole.

Nii on näiteks lause "Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn" tõene, lause " $2^3 > 10$ " väär. Kuid väljendid nagu "Mis on uudist?", "Head aega", "Korruptage arvud 5 ja 9", " $x - 8 = 10$ " ei ole lausearvutuse lauseteks, sest ei ole võimalik määrata nende tõeväärtust.

Matemaatilise loogika lauseid tähistatakse väikeste tähtedega nagu a, b, c, ..., p, q, r, **Tõese lause** tõeväärtuse tähiseks on **t**, **väära lause** tõeväärtuse tähiseks aga **v**. Kui näiteks lause a on tõene, b aga väär, siis kirjutatakse seda lühidalt võrdusena: **a = t**, **b = v**.

2. LOOGILISED TEHTED

Loogiliste tehete abil moodustatakse lausetest **liitlauseid**. Lauseid, millest liitlause moodustatakse, nimetatakse **komponentlauseteks**. Liitlause nagu iga komponentlausengi, võib olla kas tõene või väär. Liitlauseid võib moodustada ka komponentlausetest, mis ei oma sisulist ühtsust. Liitlause tõeväärtus sõltub komponentlausete tõeväärtusest ning loogilisest tehtest, mitte otseselt liitlause sisu vastavusest tegelikkusele. Iga lauset võib vaadelda samuti liitlausena.

Tähistame vaadeldavad laused järgmiselt: "Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn" \equiv a, "Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn" \equiv b, "Riia on Läti Vabariigi pealinn" \equiv c, "Riia on Leedu Vabariigi pealinn" \equiv d.

2.1. Konjunktsioon

On ilmne, et eespool nimetatud lausete tõeväärtused on a = t, b = v, c = t, d = v. Moodustame antud lausetest liitlause sidesõnaga "ja":

"Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn ja Riia on Läti Vabariigi pealinn".

Arvestades komponentlausete tähistusi ning seda, et saadud liitlause on tõene, võime kirjutada, et **a \wedge c = t \wedge t = t**, kus märk " \wedge " asendab sõna "ja".

Liitlausel "Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn ja Riia on Leedu Vabariigi pealinn" on teine komponentlause väär ja ka liitlausel loetakse vääraks. Lühidalt kirjutame seda kujul: **a \wedge d = t \wedge v = v**.

Liitlausel "Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn ja Riia on Läti Vabariigi pealinn" on esimene komponentlause väär ning ka liitlause loetakse vääraks. Seda kirjutame järgmiselt: **b \wedge c = v \wedge t = v**.

Kuid liitlausel "Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn ja Riia on Leedu Vabariigi pealinn" on mõlemad komponentlauseid väär ja ka liitlausel loetakse vääraks. Seega, **b \wedge d = v \wedge v = v**.

Esitatud liitlausete tõeväärtused määrasime vastavalt liitlause sisule. Matemaatilises loogikas ühendatakse liitlauseteks ka sisulist ühtsust mitteomavaid komponentlauseid. Et sidesõna "ja" abil saadud liitlause tõeväärtus oleks alati määratav, defineeritakse üldjuhul loogiline tehe, mille sõnaliseks vasteks on "ja" järgmiselt:

Kahe lause a ja b konjunktsiooniks nimetatakse liitlauseid $a \wedge b$ (loetakse : a ja b), mis on tõene siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlauseid a ja b on tõesed.

Hea ülevaate konjunktsiooni $a \wedge b$ tõeväärtuste sõltuvusest komponentlauseid a ja b tõeväärtustest annab järgmine tabel , mida nimetatakse **konjunktsiooni tõeväärtustabeliks**.

a	b	$a \wedge b$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	v

Konjunktsiooni nimetust kannab nii liitlause ($a \wedge b$) kui ka loogiline tehe (\wedge), mille abil see liitlause on moodustatud.

Et komponentlauseid sisuline ühtsus pole nõutav, siis võib vaadelda ka näiteks järgmisi konjunktsioone:

" $3 > -2 \wedge 10 \div 2$ ", ($10 \div 2$ loetakse: "10 jagub kahega")

"Oskar Luts on eesti kirjanik \wedge 7 on paarisarv",

"6 on paaritu arv $\wedge -2 = 2$ ".

Neist esimene on tõene, kaks viimast väärad.

2.2. Disjunktsioon

Moodustame lausetest a, b, c ja d liitlauseid sidesõnaga "või", mis vastab loogilise tehte märgile " \vee ".

"Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn või Riia on Läti Vabariigi pealinn". Et siin mõlemad komponentlauseid on tõesed, siis on ka nende disjunktsioon tõene. Seega $a \vee c = t \vee t = t$.

Liitlause "Tallinn on Eesti Vabariigi pealinn või Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn" on esimene komponentlause tõene, teine väär, kuid liitlause loetakse tõeseks. Seda märgime lühidalt $a \vee b = t \vee v = t$.

Liitlause "Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn või Riia on Läti Vabariigi pealinn" on aga esimene komponentlause väär, teine tõene. Viimane liitlause loetakse samuti tõeseks: $b \vee c = v \vee t = t$.

Kuid liitlause "Pärnu on Eesti Vabariigi pealinn või Riia on Leedu Vabariigi pealinn" on mõlemad komponentlauseid väärad. Liitlause loetakse sel juhul vääraks: $b \vee d = v \vee v = v$.

Vaadeldud liitlauseid, mis on saadud komponentlauseid ühendamisega sidesõnaga "või" kannavad ühist nimetust - **disjunktsioon**.

Kahe lause a ja b disjunktsiooniks nimetatakse liitlauseid $a \vee b$ (loetakse: a või b), mis on väär siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlauseid a ja b on väärad.

Moodustame **disjunktsiooni tõeväärtustabeli**.

a	b	$a \vee b$
t	t	t
t	v	t
v	t	t
v	v	v

Disjunktsiooniks nimetatakse ka seda tehet, mille abil saadakse vastav liitlause.

Vaatleme veel näiteks ka järgmisi disjunktsioone ja nende tõeväärtusi (pöörake tähelepanu ka korrektsele vormistusele):

"t on algarv $\vee (-1)^2 = 1^2$ " = $t \vee t = t$;

" $2 \div 3$ või $(-1)^2 > 0$ " = $v \vee t = t$.

Kirjutist $-2 \leq 0$ mõistetakse disjunktsioonina $-2 < 0 \vee -2 = 0$, mis on tõene, sest $t \vee v = t$. Kuid kirjutist $0 < 2 < 4$ mõistetakse konjunktsioonina $2 < 4 \wedge 2 > 0$, mis on tõene, sest $t \wedge t = t$.

2.3. Implikatsioon

Analüüsime järgmist Peetri poolt oma sõbrale öeldud lauset: "Kui ma tulen homme kooli, siis toon Sulle huvitava raamatu".

Tähistame komponentlauseid järgmiselt: "Ma tulen homme kooli" $\equiv k$, "Ma toon Sulle huvitava raamatu" $\equiv r$.

Et sõnaühend "kui ..., siis" on keeliliseks vasteks **implikatsiooni** märgile " \supset ", siis võime esitatud liitlause sümbolites kirjutada kujul $k \supset r$.

Vaatleme, millised on liitlause $k \Rightarrow r$ tõeväärtused olenevalt komponentlausete tõeväärtustest.

1^o Oletame, et Peeter tuli kooli ja tõi sõbrale lubatud raamatu. Siis on mõlemad komponentlauseid tõesed ning ka Peetri öeldud lause on tõene. Seega

$$k \supset r = t \supset t = t.$$

2^o Juhul, kui Peeter tuli kooli ($k = t$), kuid sõbrale huvitavat raamatut ei toonud ($r = v$), siis Peeter oma lubadust ei täitnud. Järelikult

$$k \supset r = t \supset v = v.$$

3^o Kui Peeter ei tulnud kooli ($k = v$), kuid lubatud raamatu saatis sõbrale ($r = t$), siis Peeter täitis oma lubaduse sõbra suhtes. Seega

$$k \supset r = v \supset t = t.$$

4^o Kui aga Peeter kooli ei tulnud ($k = v$) ning sõbrale huvitavat raamatut ei toonud ($r = v$), siis ei saa ka Peetrit süüdistada valetamises, sest ta lubas ju raamatu tuua siis, kui ta tuleb kooli. Sel juhul tuleb Peeter *õigeks mõista*:

$$k \supset r = v \supset v = t.$$

Näitena vaadeldud liitlause on komponentlausete k ja r **implikatsioon**. Üldiselt:

Kahe lause a ja b implikatsiooniks nimetatakse liitlause a \supset b (loetakse: kui a, siis b), mis on väär siis ja ainult siis, kui esimene komponentlause a on tõene ning teine komponentlause b on väär.

Teeme **implikatsiooni tõeväärtustabeli**:

a	b	$a \Rightarrow b$
t	t	t
t	v	v
v	t	t
v	v	t

Vastavalt definitsioonile tuleb tõesteks lugeda näiteks järgmised implikatsioonid: "kui 2 on algarv, siis Tartu asub Emajõe ääres", "kui $2 \cdot 2 = 5$, siis $3 \cdot 3 = 9$ ", "kui 6 on algarv, siis $-3 < 3$ ".

Implikatsioon "Kui $2 \cdot 2 = 4$, siis 6 on algarv" on aga väär, sest $t \Rightarrow v = v$.
 Implikatsiooni nimetust kannab ka loogiline tehe, mille märgiks on " \Rightarrow ".

2.4. Ekvivalents

Moodustame lausetest "Arvu 27 ristsumma jagub 3-ga" $\equiv a$, "Arv 27 jagub 3-ga" $\equiv b$ implikatsioonid:

"Kui arvu 27 ristsumma jagub 3-ga, siis arv 27 jagub 3-ga", ehk $a \Rightarrow b$, ja

"Kui arv 27 jagub 3-ga, siis arvu 27 ristsumma jagub 3-ga", ehk $b \Rightarrow a$.

Rakendades saadud implikatsioonidele konjunktsiooni, saame uue liitlause:

"Kui arvu 27 ristsumma jagub 3-ga, siis arv 27 jagub 3-ga, ja kui arv 27 jagub 3-ga, siis arvu ristsumma jagub 3-ga", mida sümbolites kirjutame kujul

$$(a \supset b) \wedge (b \supset a) \text{ ehk lühemalt } a \hat{=} b.$$

Viimast kirjutist loetakse: **a siis ja ainult siis, kui b** ehk vaadeldud näite korral "Arv 27 jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu 27 ristsumma jagub 3-ga".

Antud juhul on komponentlauseid ja ka liitlause tõene. Seega $a \hat{=} b = t \hat{=} t = t$.

Tõeseks loetakse ka liitlause "Arv 16 jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu 16 ristsumma jagub 3-ga". Siin on mõlemad komponentlauseid väärad.

Liitlauseid "Arv 27 jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu 16 ristsumma jagub 3-ga" ning "Arv 16 jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu 27 ristsumma jagub 3-ga" loetakse vääradeks. Neis on komponentlauseid erinevate tõeväärtustega.

Vaadeldud näited tuginevad järgmisele **ekvivalentsi** definitsioonile:

Kahe lause a ja b ekvivalentsiks nimetatakse liitlauseid $a \hat{=} b$ (loetakse: a siis ja ainult siis, kui b), mis on tõene siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlauseid a ja b omavad ühesuguseid tõeväärtusi.

Järgmine tabel on **ekvivalentsi tõeväärtustabel**.

a	b	$a \hat{=} b$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	t

Ekvivalentsi definitsiooni põhjal tuleb lugeda tõesteks näiteks järgmised liitlauseid: "Arv 7 on algarv siis ja ainult siis, kui $8^2 = 64$ ", " $2 > 7$ siis ja ainult siis, kui Tartu on miljonilinn".

Ekvivalentsiks nimetatakse ka loogilist tehet, mille tulemusena saadakse vastav liitlause.

2.5. Eitus

Moodustame lausest "Stockholm on Soome pealinn" $\equiv s$ uue lause sõnade *pole tõsi, et* abil: "Pole tõsi, et Stockholm on Soome pealinn", mida märgime sümboliga $\neg s$. Näeme, et $s = v$ ja $\neg s = t$. Antud juhul on moodustatud lähtelause s eitus.

Lause a eituseks nimetatakse liitlauseid $\neg a$ (loetakse: pole tõsi, et a ehk a eitus), mis on tõene siis ja ainult siis, kui lause a on väär.

Lause a **eituse tõeväärtustabel on järgmine**:

a	$\neg a$
t	v
v	t

Seega, väärade lause eitus on tõene ning tõese lause eitus väär. Tehet, mille abil saadakse lausest selle eitus, nimetatakse samuti eituseks.

Eitus on ainus loogiline tehe, mida saab rakendada ka ainult ühele lausele. Ülejäänud loogiliste tehete - konjunktsioon, disjunktsioon, implikatsioon, ekvivalents - rakendamiseks peab olema vähemalt kaks komponentlause.

3. LIITLAUSE TÕEVÄÄRTUSED

Vaadeldud loogilisi tehteid võib rakendada ka enam kui kahele komponentlausele.

Nii võib moodustada liitlauseid $\neg(p \wedge q)$, $(\neg p \vee q)$, $\neg(p \vee q)$ ja $(\neg p \wedge q)$. Sulud näitavad ka siin tehete järjekorda.

Lausearvutuse üks põhilisi ülesandeid ongi liitlause tõeväärtuste leidmine.

3.1. Liitlause tõeväärtused komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral

Kui komponentlausete tõeväärtused on ette antud, siis liitlause tõeväärtuse leidmiseks tuleb komponentlauseid asendada nende tõeväärtustega ning arvestada tehete järjekorda ja loogiliste tehete definitsioone.

Leiame näiteks liitlause $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ tõeväärtuse, kui on teada, et $p = t$ ja $q = v$. Arvutuskäigu kirjutame üles järgmiselt:

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) = (\neg t \vee v) \wedge (t \vee v) = (v \vee v) \wedge v = t \wedge v = t.$$

Järelikult, komponentlausete tõeväärtuste $p = t$ ja $q = v$ korral on liitlause $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ tõene.

Leiame veel ka liitlause $(\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg r)$ tõeväärtuse, kui $p = v$, $q = t$, $r = t$.

Siis $\neg[(p \vee \neg q) \wedge \neg r] = \neg[(v \vee \neg t) \wedge \neg t] = \neg[(v \vee v) \wedge v] = \neg(v \wedge v) = \neg t = v$.

Seega, kui $p = v$, $q = t$ ja $r = t$, on liitlause $\neg[(p \vee \neg q) \wedge \neg r]$ väär.

3.2. Tõeväärtustabelid

Kui komponentlausete tõeväärtused pole ette antud, siis määratakse liitlause tõeväärtused komponentlausete tõeväärtuste kõikvõimalike kombinatsioonide korral. Seda on otstarbekas teha tabeli kujul, mida nimetatakse liitlause **tõeväärtustabeliks**.

Koostame näiteks liitlause $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ tõeväärtustabeli. Tabeli peasse kirjutame komponentlauseid p ja q ning üksikud tehted nõutavas järjekorras (vt järgnevat tabelit).

Kahekomponentlause korral on 4 võimalikku tõeväärtuste kombinatsiooni. Nendega täidamegi komponentlausete p ja q tõeväärtuste veerud ning seejärel täidame tabeli ülejäänud veerud, arvestades vastavaid loogilisi tehteid.

Liitlause $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ tõeväärtused on tabeli viimases veerus. Näeme, et antud liitlause on väär vaid ühel juhul, ja nimelt siis, kui mõlemad komponentlauseid on väärad ($p = v$ ja $q = v$). Punktis 3.1 arvutatud sama liitlause tõeväärtusele komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral ($p = t$ ja $q = v$) vastab tabeli teine rida.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$
t	t	v	t	t	t
t	v	v	t	v	t
v	t	t	t	v	t
v	v	t	v	v	v

Esitame näitena ka kolme komponentlausega liitlause $\neg(p \vee \neg q) \vee r$ tõeväärtustabeli (järgnev tabel).

Nägime, et kui liitlause on 2 komponenti, siis nende tõeväärtuste erinevaid kombinatsioone on $2^2 = 4$. Kolme komponentlause korral on nende tõeväärtuste erinevaid kombinatsioone $2^3 = 8$, nelja komponentlause korral $2^4 = 16$, n komponentlause korral siis 2^n erinevat tõeväärtuste kombinatsiooni. (Et tõeväärtustabel sisaldaks komponentlause tõeväärtuste kõiki erinevaid kombinatsioone, on soovitatav komponentlause tõeväärtuste veerud täita kindla süsteemi järgi (vt eelmist ja järgmist tabelit)).

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow r$
t	t	t	v	t	v	v
t	t	v	v	t	v	t
t	v	t	t	t	v	v
t	v	v	t	t	v	t
v	t	t	v	v	t	t
v	t	v	v	v	t	v
v	v	t	t	t	v	v
v	v	v	t	t	v	t

Liitlause tõeväärtustabeleid saab kasutada ka teatud liiki **tekstülesannete lahendamiseks**. Selleks eraldame liitlause komponentlauseid, tähistame need ja kirjutame liitlause kujul esitatud ülesande tingimused sümbolites. Saadud liitlause tõeväärtustabelist leiame vastuse ülesandes püstitatud küsimusele.

Lahendame **näitena** järgmise **ülesande**.

Ühes perekonnas on lõunasöögi suhtes kujunenud tavaks, et kui süüakse suppi, siis süüakse ka praadi, ja kui suppi ei sööda, siis süüakse magustoitu, ja kui süüakse salatit, siis ei sööda praadi. Kas lõunasöögiks on ka magustoit, kui salat on juba laual?

Tähistame komponentlauseid järgmiselt. "Süüakse suppi" $\equiv s$, "Süüakse magustoitu" $\equiv m$, "Süüakse praadi" $\equiv p$, "Süüakse salatit" $\equiv a$. Antud tingimused kirjutame sümbolites järgmiselt: $(s \Rightarrow p) \wedge (\neg s \Rightarrow m) \wedge (a \Rightarrow \neg p)$.

Kuna ülesandes on antud, et salatit süüakse, siis lause a on tõene. Ülejäänud komponentlause s, p ja m kohta pole teada, kas nad on tõesed või väärad, seepärast tuleb nende suhtes vaadelda kõiki võimalusi, mida on kokku 8. Koostame liitlause tõeväärtustabeli.

a	s	p	m	$s \Rightarrow p$	$\neg s$	$\neg s \Rightarrow m$	$\neg p$	$a \Rightarrow \neg p$	$(s \Rightarrow p) \wedge (\neg s \Rightarrow m) \wedge (a \Rightarrow \neg p)$
t	t	t	t	t	v	t	v	v	v
t	t	t	v	t	v	t	v	v	v
t	t	v	t	v	v	t	t	t	v
t	t	v	v	v	v	t	t	t	v
t	v	t	t	t	t	t	v	v	v
t	v	t	v	t	t	v	v	v	v
t	v	v	t	t	t	t	t	t	(t)
t	v	v	v	t	t	v	t	t	v

Siit ilmneb, et vaadeldav liitlause on tõene ainult ühel juhul, ja nimelt siis, kui $a = t$, $s = v$, $p = v$, $m = t$. See aga tähendab, et sel juhul on ülesande tingimused kooskõlas. Ja komponentlausete tõeväärtuste põhjal saamegi vastuse ülesandes püstitatud küsimusele: kui süüakse salatit ($a = t$), siis süüakse ka magustoitu ($m = t$).
Vastus: Kui süüakse salatit, siis süüakse ka magustoitu.

4. SAMASELT TÕESED, SAMASELT VÄÄRAD NING KEHTESTATAVAD LIITLAUSED

Vaatleme liitlausete $a \supset (a \supset b)$, $\neg [a \supset (b \supset a)]$ ja $a \supset \neg b$ tõeväärtustabeleid.

a	b	$\neg a$	$a \Rightarrow b$	$\neg [a \supset (a \supset b)]$	$b \Rightarrow a$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$	$\neg [a \supset (b \supset a)]$	$\neg b$	$a \supset \neg b$
t	t	v	t	t	t	t	v	v	v
t	v	v	v	t	t	t	v	t	t
v	t	t	t	t	v	t	v	v	t
v	v	t	t	t	t	t	v	t	t

Siit ilmneb, et liitlause $a \supset (a \supset b)$ on tõene komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral (tabeli 4. veerg). Sel juhul öeldakse, et vaadeldav liitlause on **samaselt tõene** ja kirjutatakse $a \supset (a \supset b) \circ t$.

Liitlause $\neg [a \supset (b \supset a)]$ on aga väär komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral, st ta on **samaselt väär**: $\neg [a \supset (b \supset a)] \circ v$.

Kolmas liitlause $a \supset \neg b$ omandab nii tõeväärtusi t kui ka v, st on **kehtestatav**.

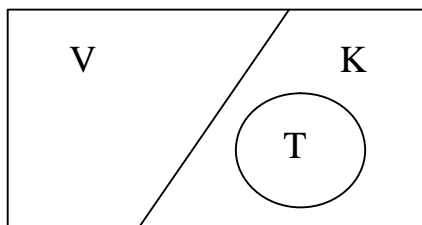
Liitlause nimetatakse samaselt tõeks, kui ta on tõene komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral

Liitlause nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on väär komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral.

Liitlause nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on tõene komponentlausete tõeväärtuste vähemalt ühe kombinatsiooni korral.

Järelikult on iga samaselt tõene liitlause ka kehtestatav.

Kogu liitlausete hulk L jaotub kaheks osahulgaks. samaselt väärade ehk mittekehtestatavate liitlausete hulk V ning kehtestatavate liitlausete hulk K, kusjuures nende ühisosa on tühihulk, st $V \cap K = \emptyset$. Samaselt tõeste liitlausete hulk T on aga kehtestatavate liitlausete hulga osahulk - $T \subset K$. Illustreerime seda joonisega:



Seega siis - et teha kindlaks, kas liitlause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav, koostame selle tõeväärtustabeli.

5. SAMAVÄÄRSED LIITLAUSED

Vaatleme liitlauseid $a \dot{\cup} (b \dot{\cup} c)$ ja $(a \dot{\cup} b) \dot{\cup} (a \dot{\cup} c)$.

a	b	c	$b \vee c$	$a \dot{\cup} (b \dot{\cup} c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \dot{\cup} b) \dot{\cup} (a \dot{\cup} c)$
t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	t	t	v	t
t	v	t	t	t	v	t	t
t	v	v	v	v	v	v	v
v	t	t	t	v	v	v	v
v	t	v	t	v	v	v	v
v	v	t	t	v	v	v	v
v	v	v	v	v	v	v	v

Tabelist ilmneb, et liitlause $a \dot{\cup} (b \dot{\cup} c)$ ja $(a \dot{\cup} b) \dot{\cup} (a \dot{\cup} c)$ tõeväärtused ühtivad komponentlause tõeväärtuste iga kombinatsiooni korral. Seepärast on need liitlauseid **samaväärsed**.

Liitlauseid nimetatakse samaväärseteks, kui nad omavad ühesuguseid tõeväärtusi komponentlause tõeväärtuste iga kombinatsiooni korral.

Liitlause samaväärsust tähistatakse samuti nagu algebraliste avaldiste samaväärsustki (\equiv). Niisiis, $a \dot{\cup} (b \dot{\cup} c) \equiv (a \dot{\cup} b) \dot{\cup} (a \dot{\cup} c)$.

Vaatleme veel liitlauseid $\dot{\cup}(p \dot{\cup} q)$ ja $\dot{\cup}p \dot{\cup} \dot{\cup}q$.

p	q	$p \wedge q$	$\dot{\cup}(p \dot{\cup} q)$	$\dot{\cup}p$	$\dot{\cup}q$	$\dot{\cup}p \dot{\cup} \dot{\cup}q$
t	t	t	v	v	v	v
t	v	v	t	v	t	v
v	t	v	t	t	v	v
v	v	v	t	t	t	t

Nende lause tõeväärtustabelist selgub, et antud liitlause tõeväärtused kahel juhul, st komponentlause kahe tõeväärtuste kombinatsiooni korral ei ühti. Vaadeldavad liitlauseid ei ole samaväärsed, mida tähistame järgmiselt: $\dot{\cup}(p \dot{\cup} q) \not\equiv \dot{\cup}p \dot{\cup} \dot{\cup}q$.

Koostame tõeväärtustabelid ka liitlausele $p \dot{\cup} q$, $q \dot{\cup} p$, $p \dot{\cup} q$, $q \dot{\cup} p$, $p \dot{\cup} p$, $q \dot{\cup} q$, $p \dot{\cup} p$, $q \dot{\cup} q$.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	v	v	v	t	t	v	t	v	v
v	t	v	v	t	t	t	v	v	v
v	v	v	v	v	v	t	t	t	t

Tabelist ilmneb, et $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$ ja $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$, kuid $p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$.

Et konjunktsiooni, disjunktsiooni ja ekvivalentsi tõeväärtus ei muutu komponentlause järjekorra muutmisel, siis on need loogilised tehted **kommutatiivsed**. Implikatsioon aga ei ole kommutatiivne. Seepärast tuleb implikatsiooni korral silmas pidada komponentlause järjekorda.

Rida samaväärseid liitlauseid on võetud lausearvutuse **põhisamasusteks**. Neid kasutatakse liitlause teisendamiseks lihtsamale kujule nii nagu näiteks algebra põhivalemeid (samasusi) kasutatakse algebraliste avaldiste lihtsustamiseks.

- PÕHISAMASUSED:**
- 1⁰ $\dot{\dot{p}} \circ p$
 - 2⁰ $p \dot{\dot{q}} \circ q \dot{\dot{p}}$
 - 3⁰ $(p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}} \circ p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}$
 - 4⁰ $p \dot{\dot{q}} \circ q \dot{\dot{p}}$
 - 5⁰ $(p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}} \circ p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}$
 - 6⁰ $p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}}$
 - 7⁰ $p \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{r}}$
 - 8⁰ $\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \circ \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}}$
 - 9⁰ $\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \circ \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}}$
 - 10⁰ $p \dot{\dot{p}} \circ p$
 - 11⁰ $p \dot{\dot{p}} \circ p$
 - 12⁰ $p \dot{\dot{q}} \circ \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}}$
 - 13⁰ $p \dot{\dot{q}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{q}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}})$
 - 14⁰ $p \dot{\dot{q}} \circ (p \dot{\dot{q}}) \dot{\dot{q}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}})$
 - 15⁰ $p \dot{\dot{t}} \circ p$
 - 16⁰ $p \dot{\dot{v}} \circ v$
 - 17⁰ $p \dot{\dot{t}} \circ t$
 - 18⁰ $p \dot{\dot{v}} \circ p$
 - 19⁰ $p \dot{\dot{p}} \circ t$
 - 20⁰ $p \dot{\dot{p}} \circ v$

6. LIITLAUSETE TEISENDAMINE

Loogilised tehted konjunktsioon, disjunktsioon, implikatsioon, ekvivalents ja eitus ei ole üksteisest sõltumatud, ükskõik millist liitlauset on võimalik teisendada põhisamasuste abil näiteks kujule, mis loogilistest tehetest sisaldab kas ainult konjunktsiooni ja eitust või disjunktsiooni ja eitust.

Liitlause teisendamist temaga samaväärseks liitlauseks nimetatakse **samasusteisenduseks**. Samasusteisendusi kasutatakse liitlauseste lihtsustamiseks ja liitlauseste samaväärsuse näitamiseks.

Lihtsustame näiteks liitlauset $\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{q}} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{r}})$.

$$\begin{aligned} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{q}} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{r}}) &\stackrel{(12^0)}{\equiv} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \stackrel{(8^0, 1^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(7^0)}{\equiv} \\ &\stackrel{(7^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \wedge (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \stackrel{(11^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \wedge (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \stackrel{(10^0)}{\equiv} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}. \end{aligned}$$

Teisendame liitlauset $(\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}$ nii, et märk " $\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}$ " esineks ainult komponentlauseste ees:

$$(\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \wedge \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(12^0, 1^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \wedge \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(8^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \wedge (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}.$$

Tõestame näiteks samaväärsuse $\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}$.

$$\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(7^0)}{\equiv} (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(19^0)}{\equiv} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \stackrel{(15^0)}{\equiv} \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}} \circ (\dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}) \dot{\dot{p}} \dot{\dot{q}} \dot{\dot{r}}.$$

Lahendame samasusteisenduste abil ka nn **lõunasöögi ülesande** (vt lk 7 - 8). Teisendame ülesande tingimuste põhjal koostatud liitlauset, kasutades põhisamasusi ning arvestades, et $a = t$:

$$\begin{aligned}
(s \Rightarrow p) \wedge (\neg s \Rightarrow m) \wedge (a \Rightarrow \neg p) &\equiv (\neg s \vee p) \wedge (s \vee m) \wedge (\neg t \vee \neg p) \equiv \\
&\equiv (\neg s \vee p) \wedge (s \vee m) \wedge \neg p \equiv (\neg s \wedge s \wedge \neg p) \vee (\neg s \wedge m \wedge \neg p) \vee (p \wedge s \wedge \neg p) \vee (p \wedge m \wedge \neg p) \equiv \\
&\equiv \neg s \wedge m \wedge \neg p.
\end{aligned}$$

Selleks, et antud liitlause oleks tõene, peavad olema konjunktsiooni definitsiooni järgi $\neg s = t$, $m = t$ ja $\neg p = t$ ehk $s = v$, $m = t$ ja $p = v$. Seega lõunasöögiks on ka magustoit ($m = t$), kui salat on laual ($a = t$), nagu me ka eelmises selle ülesande lahenduses saime.

Ka liitlause tõeväärtustabelit on hõlpsam koostada, kui liitlause on eelnevalt teisendatud lihtsamale kujule.

ÜLESANDED

1. Määrata järgmiste liitlausete tõeväärtused:

- 1) "15 : 7 ja 12 : 2" ,
- 2) "15 : 7 või 12 : 3",
- 3) "1 ≠ 5 või 3 on paarisarv",
- 4) "kui 3 > 2, siis 3 ≠ 5",
- 5) "kui 3 < 2, siis 3 ≠ 5",
- 6) "6 : 3 siis ja ainult siis, kui 6 > 3".

2. Esitada järgmised liitlused konjunktsiooni või disjunktsiooni kujul ning leida tõeväärtused:

- | | | |
|------------|-----------------|------------------|
| 1) "2 ≤ 3" | 3) "tan45° ≥ 1" | 5) "3 < π < 4" |
| 2) "2 ≥ 3" | 4) "0 < 2 < 1" | 6) "2 < √5 < 3". |

3. Eraldades ja tähistades komponentlused , kirjutada järgmised liitlused sümbolites ja määrata võimaluse korral nende tõeväärtused:

- 1) arv 15 jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu 15 ristsumma jagub 3-ga
- 2) kui 3 = -3, siis 3² = (-3)²
- 3) 2 · 6 > 11 siis ja ainult siis, kui 5 < 2

4) kui sirge läbib raadiuse otspunkti ringjoonel ja on risti raadiusega, siis see sirge on ringjoone puutuja

5) kui sirge on ringjoone puutuja, siis ta on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega

6) sirge on ringjoone puutuja siis ja ainult siis, kui ta läbib raadiuse otspunkti ringjoonel ja on risti raadiusega.

4. Järgmistes liitlausetes kirjutada punktide asemele sidesõna "ja" või "või" nii, et liitlause oleks tõene:

- 1) "a ≠ 0 b ≠ 0 korral a · b ≠ 0"
- 2) "Kui ab < 0, siis a < 0 b > 0 a > 0 b < 0"
- 3) "Kui a > 0 b > 0, siis $\frac{a}{b} > 0$."

5. Moodustada järgmiste lausete eitused sümboli "¬" abil ning määrata nende tõeväärtused:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 1) "2 < 3" | 3) "5 = 5" | 5) "2 ≥ 3" |
|------------|------------|------------|

2) " $5 \geq 7$ "

4) " $0,4 \leq 0,9$ "

6) " $2 > 3$ ".

6. Leida järgmiste liitlauseste tõeväärtused:

1) $\neg p \Rightarrow [(p \vee r) \wedge q]$, kui $p = t, q = t, r = v$;

2) $(p \wedge \neg r) \Rightarrow (\neg q \vee r)$, kui $p = v, q = t, r = t$;

3) $\neg[\neg q \Leftrightarrow (p \vee \neg r)]$, kui $p = t, q = v, r = t$.

7. Koostada järgmiste liitlauseste tõeväärtustabelid (liitlauseid eelnevalt lihtsustamata)

1) $(p \vee \neg q) \Rightarrow q$

3) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg p)$

5) $(q \vee \neg r) \Rightarrow (p \wedge q)$

2) $\neg p \Rightarrow (q \wedge p)$

4) $(\neg p \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

6) $\neg q \Leftrightarrow (p \vee \neg r)$

8. Suvelaagrist naasnud Peeter vastab sõprade küsimustele toidu suhtes järgmist: "Kui ei antud kartuleid, siis anti hapukapsast, ja kui anti kartuleid ja hapukapsast, siis ei antud lillkapsast, ja kui anti lillkapsast ning ei antud kartuleid, siis ei antud ka hapukapsast". Milliseid nimetatud produktidest anti koos; mitu võimalust on?

9. Kokkuleppe kohaselt on asutuste A, B ja C poolt välja töötatud uue projekti kinnitamise kord järgmine: kui projekti kinnitamisest võtavad alguses osa A ja B, siis peab nendega ühinema ka asutus C. Kui kinnitamine toimub asutustes B ja C, siis peab nendega ühinema ka asutus A. Kas on võimalik, et projekt kinnitataks ainult asutustes A ja C ning asutuse b osavõtt pole vajalik?

10. Perekond on puhkuse suhtes otsustanud, et kui nad sõidavad Helsingisse, siis ei sõida nad Hiiumaale, ja kui nad sõidavad Helsingisse, siis sõidavad nad ka Stockholmi, ja nad sõidavad Stockholmi ja mitte Hiiumaale. Mitu reisivõimalust on ja millised need on?

11. Tõeväärtustabelite abil otsustada, milline järgmistest liitlausestest on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:

1) $(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b$

3) $a \wedge \neg(b \Rightarrow a)$

5) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$

2) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$

4) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$

6) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)$.

12. Kasutades põhisamasusi lihtsustada järgmised liitlausest:

1) $\neg(\neg a \vee b) \Rightarrow (a \vee b) \wedge b$

4) $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$

2) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee [(p \Rightarrow q) \wedge p]$

5) $(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \vee q)$

3) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \vee b)$

6) $\neg[p \wedge q \wedge (p \Rightarrow \neg q)]$.

Kontrolltöodes lahendamisele kuuluvad ülesanded:

I variant: 1(1,6); 2(3,6); 3(2,5); 4(2); 5(1,6); 6(3); 7(1,5); 8; 11(1,4); 12(3,6)

II variant: 1(2,5); 2(2,5); 3(1,4); 4(1); 5(2,5); 6(2); 7(2,6); 9; 11(2,6); 12(1,4)

III variant: 1(3,4); 2(1,4); 3(3,6); 4(3); 5(3,4); 6(1); 7(3,4); 10; 11(3,5); 12(2,5)

Kontrolltöök M - tuleb teil lahendada variandi ülesanded.

Kontrolltöö ärasaatmise viimane tähtaeg on