3. Aksiomaatilised teooriad

3.1. Aksiomaatilise teooria üldskeem

Mitmed teaduslikud teooriad on üles ehitatud aksiomaatiliselt. See tähendab, et on valitud teatav hulk väiteid, mida nimetatakse aksioomideks ja mis loetakse kehtivaks ilma tõestamata, ning kõik ülejäänud väited tõestatakse aksioomidest lähtudes. Aksiomaatilise lähenemisviisi alusepanijaks on vanakreeka matemaatik Eukleides (u. 365 – u. 300 e.m.a), kes korrastas sel viisil tolleaegse geomeetria. Pikki sajandeid kujutas Eukleidese geomeetria endast ranguse ja süstematiseerituse musternäidet ning ta oli kuni 19. sajandini ainus tõsiseltvõetav aksiomaatiline teooria. Tänaseks on koostatud aksiomaatika paljude distsipliinide jaoks, sealhulgas ka selliste jaoks, mis otseselt matemaatika valdkonda ei kuulu.

Aksiomaatilise teooria ülesehitamisel tuleb selgus leida kahes küsimuses: mis on aksioom ja mis on tõestus. Tavaarusaama järgi tähendab aksioom väidet, mis on *silmnähtavalt õige*. Selliselt mõistis aksioomi arvatavasti ka Eukleides. Ta eeldas, et geomeetilised laused kirjeldavad ümbritsevat ruumi, ja valis nende lausete hulgast välja niisugused, mis tundusid olevat kõige ilmsemad. Teadmiste arenedes aga tekkisid kahtlused ja 19. sajandil selgus, et need aksioomid ei tarvitse sugugi reaalse ruumiga vastavuses olla – ümbritev ruum võib olla selline, et Eukleidese aksioomid seal ei kehti. Seepärast ei mõisteta tänapäeval aksioomi all enam silmnähtavalt õiget väidet. Tänapäeva aksioomid on enamasti *definitsiooni* rollis: nendega fikseeritakse uurimisobjektiks kõikvõimalike struktuuride klass, kus aksioomid kehtivad, väitmata midagi aksioomide ja tegelikkuse vahelise seose kohta. Näiteks kaasaegses geomeetrias tähendab ruum iga sellist struktuuri, kus kehtivad kaasaegse geomeetria aksioomid. Mõnel juhul võivad aksioomideks olla *relatiivsed tõed*, mis on õiged sel määral, nagu nad on katseliselt kontrollitud. Niimoodi mõistetakse aksioome näiteks loodusteadustes, mis on süstemaatilisuse huvides aksiomaatiliselt üles ehitatud.

Aja jooksul on olnud vaja täpsustada ka tõestuse mõistet. Jällegi tavaarusaamale tuginedes võime öelda, et esimesest väitest järeldub teine, kui teine väide on esimese väitega piisavalt põhjendatud. Erimeelsusi tekitab see, mida lugeda piisavaks põhjenduseks. Näiteks Eukleides kasutas oma teoreemide tõestamisel vaikimisi lauseid, mis reaalses ruumis küll kehtivad, kuid mis rangelt võttes aksioomidest ei järeldu. Võime ette kujutada ruume, kus kõik Eukleidese aksioomid on täidetud, aga need omapäi lisatud laused mitte. Vastavalt ei kehti sellistes ruumides ka nendel lausetel põhinevad teoreemid. Matemaatikute hulgas puudub näiteks üksmeel välistatud kolmanda seaduse suhtes. Kas näiteks kõigil meie poolt tõestamata ja isegi formuleerimata lausetel on alati olemas kindel tõeväärtus „tõene“ või „väär“? Kahtlusi tekitab ka nn. olemasoluteoreemide tõestamine kaudsel viisil, näiteks vastuväiteliselt, ilma otsitavat objekti tegelikult kätte näitamata.

Eespool toodud kaalutlused sunnivad aksiomaatilise teooria ülesehitamisel täpselt määratlema laused, mida loetakse aksioomideks, ja sammud, mida lubatakse teoreemide tõestamisel teha. Aksiomaatilisi teooriaid ehitatakse üles järgmise *üldskeemi* kohaselt.

1. Fikseeritakse tähestik ja antakse valemi definitsioon.
2. Osa valemeid loetakse aksioomideks. Neid pole teoorias vaja tõestada.
3. Fikseeritakse lõplik hulk *tuletusreegleid* kujul

$$\frac{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n}{\mathcal{G}}$$

   mis lubavad valemitest $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$ vahetult tuletada valemi $\mathcal{G}$.

Paneme tähele, et siin tegeldakse mitte enam lausete või väidetega, vaid valemitega. Valem, vastupidiselt lausele, on kindlapiiriline mõiste ja kujutab endast kasutatava tähestiku sümbolite järjendit. Erijuhul võib valem tähendada lausearvutuse või predikaatarvutuse valemit. Üldskeem ei määra, millise printsiibi järgi loetakse valemeid aksioomideks, sest loogika seisukohalt on see ebaoluline. Tähtis on vaid, et mõned valemid kehtivad ilma tõestuseta ja et vähemalt üks valem on aksioom. Samme tõestuses saab teha ainult tuletusreeglite abil. Tuletusreegli alumise valemi võib lugeda tõestatuks ainult siis, kui vastavad ülemised valemid on tõestatud või aksioomid.

Definitsioon 1. Tuletuseks ehk formaalseks tõestuseks nimetatakse suvalist valemite jada $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$, milles iga valem on kas aksioom või saadud mingi tuletusreegliga temale eelnevatest valemitest.

Definitsioon 2. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse tuletatavaks, kui leidub tuletus, mille viimane liige on valem $\mathcal{F}$.

Aksiomaatilise teooria näitena vaatleme teooriat MIU.

1. Tähestik on $\{\mathsf{M}, \mathsf{I}, \mathsf{U}\}$. Valemid on kõikvõimalikud sümbolite järjendid.
2. Ainuke aksioom on MI.
3. Teoorias on neli tuletusreeglit:

$$1)\ \frac{*\mathsf{I}}{*\mathsf{IU}} \qquad 2)\ \frac{\mathsf{M}*}{\mathsf{M}**} \qquad 3)\ \frac{*\mathsf{III}*}{*\mathsf{U}*} \qquad 4)\ \frac{*\mathsf{UU}*}{**}$$

Sümbol $*$ tähistab suvalist sümbolite järjendit (ka tühja).

Lähtudes aksioomist ja kasutades antud nelja reeglit, saab konstrueerida järgmise tuletuse.

1.	MI	aksioom
2.	MII	reegel 2
3.	MIIII	reegel 2
4.	MUI	reegel 3
5.	MUIU	reegel 1
6.	MUIUUIU	reegel 2
7.	MUIIU	reegel 4

Kuigi valemiteks võtsime kõikvõimalikud sümbolite järjendid, ei ole sugugi mitte kõik valemid selles teoorias tuletatavad. Näiteks peavad kõik tuletatavad valemid algama sümboliga M, sest pole reeglit, millega selle sümboli valemi algusest eemaldada saaks.

Nagu lause- ja predikaatarvutuseski, mõistetakse ka käesolevas peatükis valemeid puhtalt süntaktiliste objektidena, millel enne vastavat määrangut pole mingit sisu. Valemid on sümbolijadad. Tuletusreegleid kasutades saab olemasolevatest sümbolijadadest koostada uusi. Valemi tõestamiseks piisab, kui kirjutame aksioome reeglite kohaselt sobival viisil ümber.

Tähenduse annab valemitele semantika. Arusaadavalt võib samale valemikomplektile anda erinevaid tähendusi, st. defineerida erinevaid semantikaid. Valemi tähendus erinevates semantikates võib olla täiesti erinev. Ülaltoodud teooria valemeid võib interpreteerida näiteks kui arve kümnendsüsteemis, veduri ja vagunite lubatavaid järjestusi, aminohappeid valgus jne. Edaspidi piirdume aga selliste semantikatega, milles saab rääkida valemi tõeväärtusest.

Niisiis on meil ühelt poolt teooria ühes oma valemite, aksioomide ja tuletusreeglitega, teiselt poolt semantika, mis annab igale valemile tõeväärtuse „tõene“ või tõeväärtuse „väär“. Teooria ja semantika vahekorda kirjeldamiseks defineerime järgmised kaks mõistet.

Definitsioon 3. Aksiomaatilist teooriat nimetatakse korrektseks semantika $\mathcal{S}$ suhtes, kui iga selles teoorias tuletatav valem on semantikas $\mathcal{S}$ tõene.

Definitsioon 4. Aksiomaatilist teooriat nimetatakse täielikuks semantika $\mathcal{S}$ suhtes, kui iga semantikas $\mathcal{S}$ tõene valem on selles teoorias tuletatav.

Vaatleme näiteks järgmist aksiomaatilist teooriat.

1. Tähestik on $\{\mathsf{I}, +\}$. Valemid on sellised sümbolite järjendid, mis sisaldavad täpselt ühte sümbolit $+$.
2. Ainuke aksioom on $+$.
3. Ainuke tuletusreegel on

$$\frac{\mathsf{I} * \mathsf{I}}{*}$$

kus $*$ on suvaline valem.

Selles teoorias on tuletatavad parajasti need valemid, milles mõlemal pool sümbolit $+$ on võrdne arv sümboleid I, näiteks +, I+I, II+II, III+III.

Omistame nüüd teooria valemitele tähenduse. Defineerime semantika kolmel erineval viisil.

Semantika $\mathcal{S}_1$: $m+n$ tähendab $m = n$
Semantika $\mathcal{S}_2$: $m+n$ tähendab $m \leq n$
Semantika $\mathcal{S}_3$: $m+n$ tähendab $m < n$

Semantika $\mathcal{S}_1$ suhtes on meie teooria korrektne ja täielik: iga tuletatav valem on selles semantikas tõene ja iga semantikas tõene valem on tuletatav. Semantika $\mathcal{S}_2$ suhtes on teooria korrektne, kuid pole täielik: iga tuletatav valem on semantikas $\mathcal{S}_2$ tõene, kuid leidub semantikas $\mathcal{S}_2$ tõeseid valemeid, mis pole tuletatavad. Semantika $\mathcal{S}_3$ suhtes pole teooria ei korrektne ega täielik.

Teooriat võib täiendada, lisades tuletusreegli

$$\frac{*\mathsf{I}}{*}$$

kus $*$ on suvaline valem. Saadud kahe tuletusreegliga teooria pole semantika $\mathcal{S}_1$ suhtes korrektne, kuid on täielik. Semantika $\mathcal{S}_2$ suhtes on uus teooria korrektne ja täielik, semantika $\mathcal{S}_3$ suhtes pole teooria korrektne, on aga täielik.

3.2. Sekventsiaalne lausearvutus

Võtame nüüd vaatluse alla lausearvutuse aksiomaatika.

1. Tuletatavateks objektideks on *sekventsid*, st. avaldised kujul

   $$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G},$$

   kus $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, mis võivad sisaldada kõiki lausearvutuse tehteid peale ekvivalentsi.

2. Aksioomid on sekventsid

   $$\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{F},$$

   kus $\mathcal{F}$ on mingi lausearvutuse valem ning Γ ja Δ tähendavad suvalist valemite järjendit, mis võib olla ka tühi.

3. Tuletusreeglid on järgmised.

	Paremale sissetoomise reegel	Vasakule sissetoomise reegel/ Paremalt eemaldamise reegel
&	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \quad \Gamma \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}}$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \vee \mathcal{G}} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{H} \quad \Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \vee \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}$
$\supset$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \supset \mathcal{G}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \quad \Gamma \vdash \mathcal{F} \supset \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{G}}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \quad \Gamma, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}}{\Gamma \vdash \neg\mathcal{F}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}}$

Peale selle on kaks *struktuurset reeglit*

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{F}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \Delta, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{G}}$$

Sümbolid Γ ja Δ tähendavad nagu ennegi suvalist valemite jada.

Sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ mõistame nii: valemitest $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\ldots$, $\mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$. See vastab paljude matemaatiliste väidete üldisele kujule – kui eeldused kehtivad, siis kehtib ka väide.

Aksioomideks olevad sekventsid väljendavad kõige ilmsemat järeldumist. Kindlasti võime eeldustest järeldada väite, kui väide esineb ise juba eelduste hulgas.

Teooria peamine sisu on koondatud tuletusreeglitesse. Need vastavad enam-vähem matemaatikas kasutatavatele tõestusvõtetele. Näiteks konjunktsiooni paremale sissetoomise reegli abil saab tuletada sekventsi $\Gamma \vdash \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}$, kui eelnevalt on tuletatud sekventsid $\Gamma \vdash \mathcal{F}$ ja $\Gamma \vdash \mathcal{G}$.

Sellises süsteemis on tuletus jada, kus järjekordse sekventsi saamiseks viidatakse tuletusreeglile ja eespool asetsevale sekventsile. Juhul, kui reeglil on mitu eeldust, tuleb loomulikult kasutada mitut eespool asuvat sekventsi. Ent tuletust otsida on käesolevas süsteemis siiski otstarbekam mitte jada, vaid puu kujul. Kui meil on ette antud sekvents, siis võime püüda selgitada, millise reegliga see sekvents tekkida võib. Teinud reegli kindlaks, tuleb edasi otsida järgmist reeglit, millega saab tekkida selle reegli eeldus (või eeldused), siis reeglit, mis sobib järgmiste eelduste tuletamiseks jne. Seal, kus kasutame rohkem kui ühe eeldusega reeglit, tekib puus hargnemine.

Tuletame näiteks sekventsi $A\,\&(B \vee C) \vdash A\,\&\,B \vee A\,\&\,C$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A, B \vdash A}} \quad \overline{\overline{A, B \vdash B}}}{A, B \vdash A\,\&\,B}}{A, B \vdash A\,\&\,B \vee A\,\&\,C} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A, C \vdash A}} \quad \overline{\overline{A, C \vdash C}}}{A, C \vdash A\,\&\,C}}{A, C \vdash A\,\&\,B \vee A\,\&\,C}}{A, B \vee C \vdash A\,\&\,B \vee A\,\&\,C}}{A\,\&(B \vee C) \vdash A\,\&\,B \vee A\,\&\,C}$$

Kui sekventsi vasakus pooles esinevad mingi valem ja tema eitus korraga, siis saab järeldada ükskõik millise teise valemi. Erivõttena tuleb seejuures kasutada kahekordse eituse paremalt eemaldamise reeglit.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A, \neg A, B \vdash A}} \quad \overline{\overline{A, \neg A, B \vdash \neg A}}}{A, \neg A \vdash \neg\neg B}}{A, \neg A \vdash B}$$

Tuletatavad on kõik lausearvutuse tehete vahelised seosed. Eituse paremale sissetoomise reeglis tuleb puuduv valem määrata ise. Näiteks

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg A, \neg B, A \vdash A}} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg A, \neg B, B, \neg A \vdash B}} \quad \overline{\overline{\neg A, \neg B, B, \neg A \vdash \neg B}}}{\neg A, \neg B, B \vdash \neg\neg A}}{\neg A, \neg B, B \vdash A}}{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash A} \quad \overline{\overline{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg A}}}{\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)}}{\neg A\,\&\,\neg B \vdash \neg(A \vee B)}$$

Samuti saab tuletada tautoloogiaid, sekventse, mille vasak pool on tühi.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A}}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A} \quad \overline{\overline{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)}}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A} \quad \overline{\overline{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}}}{\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}}{\vdash A \vee \neg A}$$

3.3. Lausearvutuse korrektsus ja mittevasturääkivus

Iga aksiomaatilise teooria puhul huvitab meid küsimus, millised valemid on tuletatavad ja millised mitte. Teooria ühed kõige olulisemad omadused on korrektsus ja täielikkus. Eelneva punkti põhjal võib oletada, et lausearvutuse aksiomaatilises teoorias on tuletatavad sekventsid, mille eesliikme valemitest järeldub tagaliikme valem, ning kõik ülejäänud sekventsid on mittetuletatavad. Käesolevas ja järgmises punktis tõestame, et nii see tegelikult ongi.

Definitsioon 5. Sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ valemkujuks nimetatakse valemit $\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{G}$, kui $n > 0$, ja valemit $\mathcal{G}$, kui $n = 0$.

Teoreem 1. (Korrektsuse teoreem.) Kui sekvents $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.

Tõestus. Tõestame teoreemi induktsiooniga tuletuspuu struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui sekvents on aksioom, siis esineb tagaliikme valem eesliikme valemite hulgas ning sekventsil on kuju

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{i-1}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{i+1}, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{F},$$

Selle sekventsi valemkuju on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_{i-1} \,\&\, \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{F}_{i+1} \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}.$$

Oletame, et leidub kõigi siin esinevate lausemuutujate väärtustus, et valem on väär. Siis peab implikatsiooni eesliige olema tõene ja tagaliige väär. Kuna eesliige on tõene, siis on tõesed kõik tema komponendid, kaasa arvatud valem $\mathcal{F}$. See aga on vastuolus sellega, et implikatsiooni tagaliige on väär. Järelikult ei leidu väärtustust, kus vaadeldava sekventsi valemkuju on väär, ehk sekventsi valemkuju on samaselt tõene.

Induktsiooni samm. Iga reegli jaoks tuleb näidata, et kui kõik joonepealsed valemid on samaselt tõesed, siis ka joonealune valem on samaselt tõene, st. samaselt tõesus liigub mööda tuletuspuud allapoole. Piirdume siinkohal implikatsiooni reeglite ja eituse paremale sissetoomise reegliga. Ülejäänud juhud tõestatakse analoogiliselt.

Implikatsiooni paremale sissetoomise reegel. Kui Γ koosneb valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, siis joonepealse sekventsi valemkuju on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \mathcal{F} \supset \mathcal{G},$$

joonealuse sekventsi valemkuju aga

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset (\mathcal{F} \supset \mathcal{G}).$$

Oletame, et esimene valemkuju on samaselt tõene, kuid teine valemkuju on mingil väärtustusel väär. Siis peab valem $\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n$ olema sellel väärtustusel tõene ja valem $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ väär. Viimasest järeldub, et valem $\mathcal{F}$ on tõene ja valem $\mathcal{G}$ on väär. Nüüd aga on esimene valemkuju väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär. See on vastuolus tema samaselt tõesusega.

Vastuolu tekkis oletusest, et teine valemkuju on mingil väärtustusel väär. Järelikult teine valemkuju on samaselt tõene.

Implikatsiooni paremalt eemaldamise reegel. Kui Γ koosneb valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}$$

ja

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset (\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$$

ning joonealuse sekventsi valemkuju

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{G}.$$

Oletame, et esimesed kaks valemkuju on samaselt tõesed, kuid kolmas valemkuju on mingil väärtustusel väär. Siis peab valem $\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n$ olema sellel väärtustusel tõene ja valem $\mathcal{G}$ väär. Kuna esimene valemkuju on samaselt tõene ja implikatsiooni eesliige on tõene, siis on ka valem $\mathcal{F}$ tõene. Nüüd on teise implikatsiooni tagaliige vaadeldaval väärtustusel väär, eesliige tõene ja kogu implikatsioon väär. See on vastuolus teise valemkuju samaselt tõesusega. Vastuolu tekkis oletusest, et kolmas valemkuju on mingil väärtustusel väär. Järelikult kolmas valemkuju on samaselt tõene.

Eituse paremale sissetoomise reegel. Kui Γ koosneb valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \mathcal{F} \supset \mathcal{G}$$

ja

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \mathcal{F} \supset \neg\mathcal{G}$$

ning joonealuse sekventsi valemkuju

$$\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \neg\mathcal{F}.$$

Oletame, et esimesed kaks valemkuju on samaselt tõesed, kuid kolmas valemkuju on mingil väärtustusel väär. Siis peab valem $\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n$ olema sellel väärtustusel tõene, valem $\neg\mathcal{F}$ väär ning valem $\mathcal{F}$ tõene. Järelikult on kahes esimeses valemkujus mõlemas implikatsiooni eesliige tõene. Kui vaadeldaval väärtustusel on valem $\mathcal{G}$ on väär, siis esimene valemkuju on samuti väär; kui aga valem $\mathcal{G}$ on tõene, siis $\neg\mathcal{G}$ on väär ja teine valemkuju on väär. Mõlemal juhul saame vastuolu samaselt tõesusega. Vastuolu tekkis oletusest, et kolmas valemkuju on mingil väärtustusel väär. Järelikult kolmas valemkuju on samaselt tõene.

Ülejäänud juhud vaadatakse läbi sarnasel viisil: oletame, et ülemised sekventsid on samaselt tõesed, kuid alumine sekvents on mingil väärtustusel väär. Sekventsi osadeks jaotades jõuame vastuoluni, mis tähendab, et alumine sekvents ei saa olla väär ühelgi väärtustusel, vaid peab olema samaselt tõene. □

Aksiomaatilise teooria oluline omadus, mida tihtipeale saab siduda korrektsusega, on mittevasturääkivus. Erinevalt korrektsusest ja täielikkusest on mittevasturääkivus puhtalt süntaktiline mõiste ega sõltu valitud semantikast. Kuid see-eest peavad tuletatavad objektid olema sellised, et on mõtet rääkida vähemalt nende osade eitustest. Olgu tuletatavateks objektideks sekventsid.

Definitsioon 6. Aksiomaatilist teooriat nimetatakse vasturääkivaks, kui leidub valem $\mathcal{F}$, et selles teoorias on tuletatavad sekventsid $\vdash \mathcal{F}$ ja $\vdash \neg\mathcal{F}$. Kui niisugust valemit ei leidu, siis nimetatakse teooriat mittevasturääkivaks.

Teoreem 2. (Mittevasturääkivuse teoreem.) Lausearvutus on mittevasturääkiv.

Tõestus. Oletame vastupidi, et leidub lausearvutuse valem $\mathcal{F}$, et on tuletatavad nii sekvents $\vdash \mathcal{F}$ kui ka sekvents $\vdash \neg\mathcal{F}$. Korrektsuse teoreemi põhjal on iga tuletatava sekventsi valemkuju samaselt tõene. See tähendab, et valem $\mathcal{F}$ ja valem $\neg\mathcal{F}$ on samaselt tõesed, mis aga on võimatu. □

3.4. Lausearvutuse täielikkus

Järgmisena võtame vaatluse alla lausearvutuse täielikkuse küsimuse.

Olgu A lausemuutuja ning α tõeväärtus. Tähistame

$$A^\alpha = \begin{cases} A, & \text{kui } \alpha = t \\ \neg A, & \text{kui } \alpha = v \end{cases}$$

Teoreem 3. (Valemi tõeväärtuse arvutamisest.) Olgu $\mathcal{F}$ lausearvutuse valem ja $A_1, \ldots, A_n$ kõik temas esinevad lausemuutujad. Kui valem $\mathcal{F}$ on muutujate väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tõene, siis on tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{F},$$

kui valem $\mathcal{F}$ on muutujate väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ väär, siis on tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{F}.$$

Sisuliselt väidab teoreem seda, et me saame aksiomaatilises süsteemis välja arvutada valemi tõeväärtuse etteantud väärtustusel. Näiteks väidab teoreem, et on tuletatav sekvents $A, \neg B \vdash \neg(\neg A \vee B)$, sest valem $\neg A \vee B$ on väärtustusel (t, v) väär.

Tõestus. Tõestame teoreemi induktsiooniga valemi struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui $\mathcal{F}$ on lausemuutuja, näiteks A, ja $\alpha = t$, siis teoreemi väite kohaselt peab olema tuletatav sekvents $A \vdash A$. Kui $\alpha = v$, siis peab olema tuletatav sekvents $\neg A \vdash \neg A$. Mõlemad sekventsid on tuletatavad, sest nad on aksioomid.

Induktsiooni samm. Vaatleme eraldi juhte valemi ehituse järgi.

Juht 1. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\neg\mathcal{G}$. Oletame, et valemi $\mathcal{G}$ jaoks on teoreem tõestatud. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Kui valem $\mathcal{F}$ on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}$. Et valem G on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on viimane sekvents tuletatav induktsiooni eelduse põhjal.

Kui valem $\mathcal{F}$ on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\neg\mathcal{G}$. Et valem $\mathcal{G}$ on sellel väärtustusel tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \neg\mathcal{G} \vdash \mathcal{G}} \qquad \overline{\overline{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \neg\mathcal{G} \vdash \neg\mathcal{G}}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\neg\mathcal{G}}$$

Sekvents vasakus harus on tuletatav induktsiooni eelduse põhjal.

Juht 2. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}$. Oletame, et valemite $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ jaoks on teoreem tõestatud. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Kui $\mathcal{F}$ on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}$. Et valemid $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ peavad olema tõesed, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad sekventsid $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}$ ja $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{H}$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt

$$\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}} \qquad \dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}}$$

Kui valem $\mathcal{F}$ on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H})$. Valem $\mathcal{F}$ saab olla väär kahel juhul. Kui $\mathcal{G}$ on väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}$ ja vajalik tuletus on

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \vdash \mathcal{G}}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \vdash \mathcal{G}} \qquad \dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H})}$$

Kui $\mathcal{H}$ on väär, siis on tõestus analoogline.

Juht 3. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$. Oletame, et valemite $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ jaoks on teoreem tõestatud. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Kui $\mathcal{F}$ on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$. Valem $\mathcal{F}$ saab olla tõene kahel juhul. Kui $\mathcal{G}$ on tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}$ ja vajalik tuletus on

$$\cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \vee \mathcal{H}}$$

Kui $\mathcal{H}$ on tõene, siis on tõestus analoogline.

Kui valem $\mathcal{F}$ on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$. Et valemid $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ peavad olema väärad, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad sekventsid $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}$ ja $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{H}$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}} \quad \cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G} \mathbin{\&} \neg\mathcal{H}} \quad \cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \neg\mathcal{G} \mathbin{\&} \neg\mathcal{H} \vdash \neg(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G} \mathbin{\&} \neg\mathcal{H} \supset \neg(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})}$$

Parempoolse haru ülemine sekvents on tuletatav jaotise 3.2 näite eeskujul.

Juht 4. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$. Oletame, et valemite $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ jaoks on teoreem tõestatud. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Kui $\mathcal{F}$ on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \supset \mathcal{H}$. Valem $\mathcal{F}$ saab olla tõene kahel juhul. Kui $\mathcal{G}$ on väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}$ ja vajalik tuletus on

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \vdash \neg\mathcal{G}} \quad \cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G}, \neg\mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \vdash \neg\mathcal{G} \supset \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \supset \mathcal{H}}$$

Parempoolse haru ülemine sekvents on tuletatav jaotise 3.2 eeskujul. Teisel juhul, kui $\mathcal{H}$ on tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{H}$ ja vajalik tuletus on

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathcal{G} \supset \mathcal{H}}$$

Kui valem $\mathcal{F}$ on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg\mathcal{F}$ ehk $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(\mathcal{G}\supset\mathcal{H})$. Et valem $\mathcal{G}$ peab olema tõene ja valem $\mathcal{H}$ väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad sekventsid $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\mathcal{G}$ ja $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg\mathcal{H}$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},\mathcal{G}\supset\mathcal{H}\vdash\mathcal{G}}\quad\overline{\overline{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},\mathcal{G}\supset\mathcal{H}\vdash\mathcal{G}\supset\mathcal{H}}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},\mathcal{G}\supset\mathcal{H}\vdash\mathcal{H}}\quad\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg\mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},\mathcal{G}\supset\mathcal{H}\vdash\neg\mathcal{H}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(\mathcal{G}\supset\mathcal{H})}$$

□

Teoreem 4. (Täielikkuse teoreem.) Kui sekventsi $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\ldots,\mathcal{F}_n\vdash\mathcal{G}$ valemkuju on samaselt tõene, siis sekvents on tuletatav.

Tõestus. a) Oletame kõigepealt, et $n=0$. Siis on meil tegemist sekventsiga $\vdash\mathcal{G}$. Viimase sekventsi valemkuju on $\mathcal{G}$, seega on $\mathcal{G}$ samaselt tõene valem. Vaja on näidata, et $\vdash\mathcal{G}$ on tuletatav.

Olgu A_1, …, A_n kõik lausemuutujad, mis sisalduvad valemis $\mathcal{G}$. Eelmise teoreemi põhjal on suvalise väärtustuse $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ korral tuletatav sekvents

$$A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\mathcal{G}.$$

Näitame, et liikmed sekventsi vasakult poolelt võib ära jätta.

Tõepoolest, kuna valem $\mathcal{G}$ on tõene väärtustustel $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},t)$ ja $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},v)$, siis on tuletatavad sekventsid

$$A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},A_n\vdash\mathcal{G}\quad\text{ja}\quad A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\neg A_n\vdash\mathcal{G}.$$

Nüüd saame sekventsi

$$A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\vdash\mathcal{G}.$$

tuletada järgmiselt.

$$\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\vdash A_n\vee\neg A_n}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},A_n\vdash\mathcal{G}}\quad\dfrac{\cdots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\neg A_n\vdash\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},A_n\vee\neg A_n\vdash\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\vdash A_n\vee\neg A_n\supset\mathcal{G}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\vdash\mathcal{G}}$$

Vasakpoolse haru ülemine sekvents on tuletatav jaotise 3.2 eeskujul, parempoolse haru mõlemad ülemised sekventsid on tuletatavad eelduse põhjal.

Niimoodi saab järk-järgult eemaldada vasakust poolest kõik liikmed $A_n^{\alpha_n}$, $A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, …, $A_1^{\alpha_n}$. Järele jääb sekventsi $\vdash\mathcal{G}$ tuletus.

b) Olgu nüüd $n > 0$. Sekventsi valemkuju on siis $\mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{G}$. Kuna eeldame, et see on samaselt tõene, siis on tõestuse eelmise osa põhjal tuletatav sekvents

$$\vdash \mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{G}.$$

Siis on ka sekvents $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ tuletatav:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n} \quad \dfrac{\ldots}{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{F}_1 \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{G}}}{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}}$$

Vasakus harus olev sekvents on tuletatav konjunktsiooni komponentideks lahutamise teel, parema haru ülemise sekventsi parem pool on tuletatav ka ilma vasaku pooleta. □

Võttes korrektsuse ja täielikkuse teoreemi kokku, võime formuleerida tingimuse, millised sekventsid on tuletatavad ja millised mitte.

Teoreem 5. (Tuletatavuse kirjeldus.) Sekventsiaalses lausearvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.

Teisiti öeldes, lausearvutuse aksiomaatiline teooria on korrektne ja täielik samaselt tõesuse semantika suhtes.

3.5. Sekventsiaalne predikaatarvutus

Predikaatarvutuse aksiomaatilise teooria konstrueerime sama põhimõtte järgi nagu lausearvutuses.

1. Tuletatavateks objektideks on *sekventsid*, st. avaldised kujul

   $$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G},$$

   kus $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}$ on predikaatarvutuse valemid, mis võivad sisaldada kõiki lausearvutuse tehteid peale ekvivalentsi.

2. Aksioomid on sekventsid

   $$\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{F},$$

   kus $\mathcal{F}$ on mingi predikaatarvutuse valem ning Γ ja Δ tähendavad suvalist valemite järjendit, mis võib olla ka tühi.

3. Tuletusreeglid on

   1) Lausearvutuse tuletusreeglid
   2) Kvantorreeglid:

	Paremale sissetoomise reegel	Vasakule sissetoomise reegel
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F}(x)}{\Gamma \vdash \forall x \mathcal{F}(x)}\ (*)$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F}(t) \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \forall x \mathcal{F}(x) \vdash \mathcal{G}}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F}(t)}{\Gamma \vdash \exists x \mathcal{F}(x)}$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F}(x) \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \exists x \mathcal{F}(x) \vdash \mathcal{G}}\ (*)$

kus t on suvaline term ja $(*)$ tähendab tingimust, et kvantoriga seotav muutuja ei tohi esineda vabalt sekventsi üheski teises valemis.

Tingimus $(*)$ on oluline, ilma selleta võiksime tuletada mittekehtivaid sekventse. Olgu näiteks toodud kaks sellist pseudotuletust, kus esimeses ignoreeritakse kitsendavat tingimust üldisuse kvantori, teises aga olemasolu kvantori puhul.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P(x) \vdash P(x)}}}{P(x) \vdash \forall x P(x)}}{\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P(x) \vdash P(x)}}}{\exists x P(x) \vdash P(x)}}{\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)}$$

Alumine sekvents väidab, et kui leidub objekt, millel on omadus P, siis on omadus P kõigil objektidel. Niisugune järeldus ilmselt ei kehti.

Üldisuse kvantori paremale sissetoomisel tähistab muutuja x teatavat konkretiseerimata objekti. Kui on tõestatud reegli ülemine sekvents, st. valemite hulgast Γ järeldub valem $\mathcal{F}(x)$, ja tingimus $(*)$ kehtib, siis eeldustest Γ järeldub valem $\mathcal{F}(x)$ muutuja x iga väärtuse korral. Hulga Γ valemid muutujat x ei sisalda ning nende tõeväärtus jääb erinevatel x väärtustel samaks. Seega eeldustest Γ järeldub ka valem $\forall x \mathcal{F}(x)$. Üldisuse kvantori vasakule sissetoomisel ei ole seevastu kitsendavat tingimust vaja: kui valemist $\mathcal{F}(t)$ saab järeldada valemi $\mathcal{G}$, siis ammugi saab valemi $\mathcal{G}$ järeldada valemist $\forall x \mathcal{F}(x)$.

Olemasolu kvantori vasakule sissetoomisel tähistab muutuja x samuti teatavat konkretiseerimata objekti. Kui on tõestatud, et valemite hulgast Γ ning valemist $\mathcal{F}(x)$ järeldub $\mathcal{G}$, ja tingimus $(*)$ kehtib, siis muutuja x väärtuse muutmine ei saa seda järeldumist mõjutada, sest ülejäänud valemite tõeväärtus jääb muutuja x erinevatel väärtustel samaks. Muu hulgas kehtib järeldumine ka juhul, mil x mingi väärtuse korral $\mathcal{F}(x)$ on tõene ehk $\exists x \mathcal{F}(x)$ on tõene. Olemasolu kvantori paremale sissetoomisel pole kitsendust vaja, sest kui on näidatud valemi $\mathcal{F}(t)$ kehtivus, siis ilmselt kehtib ka valem $\exists x \mathcal{F}(x)$.

Tuletuse otsimisel tuleb püüda rakendada kitsendusega reegleid puu allosas ja ilma kitsenduseta reegleid ülaosas. Näiteks

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P(y) \vdash P(y)}}}{\forall x P(x) \vdash P(y)}}{\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)}$$

Kvantorreegleid vastupidises järjekorras rakendades võime jõuda sekventsini, mille tuletamine on võimatu. Näiteks

$$\dfrac{\dfrac{P(t) \vdash P(y)}{P(t) \vdash \forall y P(y)}}{\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)}$$

Termiks t ei saa võtta muutujat y, sest siis oleks viimasel sammul tingimus $(*)$ rikutud.

Koostame sekventsi $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash \forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x)$ tuletuspuu.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash P(x)}}}{P(x) \,\&\, Q(x) \vdash P(x)}}{\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash P(x)}}{\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash \forall x P(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash Q(x)}}}{P(x) \,\&\, Q(x) \vdash Q(x)}}{\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash Q(x)}}{\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash \forall x Q(x)}}{\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \vdash \forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x)}$$

Predikaatarvutuse puhul huvitavad meid samasugused küsimused nagu lausearvutuses: korrektsus, täielikkus ja mittevasturääkivus.

Teoreem 6. (Korrektsuse teoreem.) Kui sekvents $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.

Tõestus. Tõestame teoreemi induktsiooniga tuletuspuu struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui sekvents on aksioom, siis kehtib analoogiline arutlus nagu vastavas teoreemis lausearvutuse kohta.

Induktsiooni samm. Iga reegli jaoks tuleb näidata, et kui kõik joonepealsed valemid on samaselt tõesed, siis ka joonealune valem on samaselt tõene, st. samaselt tõesus liigub mööda tuletuspuud allapoole. Lausearvutuse reeglite korral saab vastava tõestuse üle kanda. Vaja on vaadelda veel kvantorreegleid. Piirdume siinkohal üldisuse kvantoriga, olemasolu kvantori juhul on tõestus analoogiline.

Üldisuse kvantori paremale sissetoomise reegel. Joonepealse sekventsi valemkuju on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}(x),$$

joonealuse sekventsi valemkuju aga

$$\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n \supset \forall x \mathcal{F}(x).$$

Oletame, et esimene valemkuju on samaselt tõene, kuid teine valemkuju on mingis struktuuris $\mathcal{A}$ väär. Siis peab valem $\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n$ olema selles struktuuris tõene ja valem $\forall x \mathcal{F}(x)$ väär. Kuna viimane valem on väär, siis leidub põhihulgas $U_{\mathcal{A}}$ element u_0, et kui muutujale x omistada element u_0, siis valem $\mathcal{F}(x)$ on väär. Vaatleme nüüd struktuuri $\mathcal{A}_{[x/u_0]}$, mis langeb struktuuriga $\mathcal{A}$ kokku kõikjal, ainsa erinevusega, et muutuja x interpretatsiooniks valime elemendi u_0. Kuna valemid $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_n$ ei sisalda tingimuse $(*)$ tõttu muutujat x vabalt, siis valem $\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n$ on ka selles struktuuris tõene. Valem $\mathcal{F}(x)$ on aga väär. Nüüd aga on esimene valemkuju väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär. See on vastuolus tema samaselt tõesusega. Vastuolu tekkis oletusest, et teine valemkuju on mingis struktuuris väär. Järelikult teine valemkuju on samaselt tõene.

Üldisuse kvantori vasakule sissetoomise reegel. Joonepealse sekventsi valemkuju on

$$\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \mathcal{F}(t) \supset \mathcal{G},$$

joonealuse sekventsi valemkuju aga

$$\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \forall x \mathcal{F}(x) \supset \mathcal{G}.$$

Oletame, et esimene valemkuju on samaselt tõene, kuid teine valemkuju on mingis struktuuris $\mathcal{A}$ väär. Siis peab valem $\mathcal{F}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_n \,\&\, \forall x \mathcal{F}(x)$ olema selles struktuuris tõene ja valem $\mathcal{G}$ väär. Konjunktsiooni omaduse põhjal on valemid $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_n$, $\forall x \mathcal{F}(x)$ kõik tõesed. Kuna valem $\forall x \mathcal{F}(x)$ on tõene, siis on tõene ka valem $\mathcal{F}(t)$. Nüüd aga on esimene valemkuju väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär. See on vastuolus tema samaselt tõesusega. Vastuolu tekkis oletusest, et teine valemkuju on mingis struktuuris väär. Järelikult teine valemkuju on samaselt tõene. □

Teoreem 7. (Mittevasturääkivuse teoreem.) Predikaatarvutus on mittevasturääkiv.

Tõestus. Tõestus on analoogiline lausearvutuse juhuga. □

Teoreem 8. (Täielikkuse teoreem.) Kui sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ valemkuju on samaselt tõene, siis sekvents on tuletatav.

Selle teoreemi tõestas Austria loogik K. Gödel aastal 1930. Omal ajal oli see matemaatilise loogika üks silmapaistvamaid tulemusi.

Teoreem 9. (Tuletatavuse kirjeldus.) Sekventsiaalses predikaatarvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.

Teisiti öeldes, predikaatarvutuse aksiomaatiline teooria on, nagu lausearvutuse omagi, korrektne ja täielik samaselt tõesuse semantika suhtes.