2. Predikaatarvutus

2.1. Põhimõisted

Lausearvutuses vaatlesime, kuidas liitlause tõeväärtus sõltub lihtlausete tõeväärtustest. Predikaatarvutus on lausearvutuse üldistus selles suhtes, et siin jaotame ka lihtlaused osadeks. Seetõttu saab predikaatarvutuse abil uurida lausete struktuuri täpsemini ning väljendada väiteid, mida lausearvutuses väljendada pole võimalik. Uued mõisted võrreldes lausearvutusega on predikaadid, funktsioonid ja muutujad ning sümbolid nende tähistamiseks – predikaatsümbolid, funktsionaalsümbolid ja muutujasümbolid. Peale nende kasutatakse predikaatarvutuses veel eriliiki sümboleid – kvantoreid.

Olgu meil näiteks lause

Jaan on aus.

See lause on lihtlause, kuid teda võib vaadelda koosnevana kahest komponendist: esiteks isikunimi „Jaan“ ja teiseks konstruktsioon „... on aus“. Predikaatarvutuses jaotataksegi lause kahte tüüpi koostisosadeks: *subjektideks*, mille kohta lauses midagi väidetakse ja *predikaadiks*, mis väljendab subjekti omadust või seost subjektide vahel. Eelnevas lauses on „Jaan“ subjekt ja „... on aus“ predikaat. Seega väljendab predikaat siin subjekti teatavat omadust.

Vaatleme nüüd lauset

Jüri armastab Mari.

Selles lauses on kaks subjekti: „Jüri“ ja „Mari“, mida ühendab predikaat „... armastab ...“. Siin väljendab predikaat seost kahe subjekti vahel.

Predikaadid jaotatakse klassidesse selle järgi, mitme subjektiga nendes tegemist on. Toodud näidetes on predikaat „... on aus“ ühekohaline ning predikaat „... armastab ...“ kahekohaline. Loomulikult on olemas ka kolme-nelja ja enamakohalisi predikaate. Vastupidises suunas üldistusi tehes võib määratleda nullikohalise predikaadi mõiste. See on omadus, mis võimalikest subjektidest üldse ei sõltu, näiteks

On talv.

Iga predikaadiga seostub tavaliselt hulk, millesse loetakse kuuluvaks predikaadi subjekte. Niisugust hulka nimetatakse põhihulgaks ehk universumiks. Näiteks kui on tegemist predikaadiga „... on aus“, siis on loomulik valida põhihulgaks kõigi inimeste hulk. Võttes järjestikku ette kõik põhihulga elemendid, võime nendest igaühele predikaati lisades koostada lause. Kui näiteks inimeste hulk on esitatud nimede järjendina $\{\text{Jaan}, \text{Epp}, \text{Madis}, \ldots\}$, siis saame laused

Jaan on aus.
Epp on aus.
Madis on aus.
... jne ...

Niimoodi tekkivatest laustest võib igaüks olla tõene või väär. Seetõttu võib predikaati, täpsemini ühekohalist predikaati mõista ka kujutusena, mis igale põhihulga elemendile seab vastavusse tõeväärtuse „tõene“ või tõeväärtuse „väär“.

Kahekohalise predikaadi puhul võib toimida analoogiliselt. Kui näiteks tegemist on predikaadiga „... armastab ...“ ja põhihulgaks on kõigi inimeste hulk, siis vaadeldes kõikvõimalikke põhihulga elementide paare, saame laused

Jaan armastab Jaani
Jaan armastab Eppu.
Jaan armastab Madist.
Epp armastab Jaani.
Epp armastab Eppu.
... jne ...

Nendest lausetest võib igaüks jälle olla kas tõene või väär. Kahekohalist predikaati võib seega käsitada kui kujutust, mis igale põhihulga elementide paarile seab vastavusse tõeväärtuse „tõene“ või tõeväärtuse „väär“.

Kolmekohaliste predikaatide puhul tuleb loomulikult vaadelda kolmikuid, neljakohaliste predikaatide puhul nelikuid jne. Nullikohalised predikaadid subjektidest ei sõltu ja nende puhul võib põhihulga valida suvaliselt. Näiteks lause

On talv.

tõeväärtus sõltub muudest asjaoludest, mitte põhihulga mingitest valitud elementidest.

Eelnevas lähtusime predikaadist ja määrasime talle vastava põhihulga. On võimalik ka vastupidine suund: valime põhihulga ja defineerime sellel teatavad predikaadid. Tegeledes aritmeetikaga, võib osutuda kasulikuks valida põhihulgaks naturaalarvude hulk

$$\{0, 1, 2, \ldots\}$$

ning võtta tarvitusele ühekohalised predikaadid „... on paarisarv“, „... on paaritu arv“, „... on algarv“, kahekohalised predikaadid „... on suurem kui ...“, „... on väiksem kui ...“, „... on võrdne ...-ga“, kolmekohaline predikaat „... pluss ... on ...“ jt. Erinevaid võimalusi on palju.

Predikaatide märkimiseks kasutatakse tähti P, Q, R, A, B, C, nn. predikaatsümboleid, kirjutades nende järele sulgudesse argumendid. Näiteks $P(x)$ sobib ühekohalise ning $Q(x, y)$ kahekohalise predikaadi tähistamiseks.

Kui meil on põhihulk ja sellel defineeritud predikaat, siis võib kirja panna väiteid, et mingi omadus kehtib kõigi põhihulga elementide korral või et põhihulgas leidub element, millel on mingi omadus. Näiteks

> Iga inimene on aus.
> Leidub inimene, kes on aus.

Olulised on siin sõnad „iga“ ja „leidub“. Predikaatarvutuses tähistatakse niisuguseid sõnu spetsiaalsete sümbolitega, mida nimetatakse kvantoriteks. Sõnale „iga“ vastab kvantor $\forall$, sõnale „leidub“ aga kvantor $\exists$.

Matemaatilise sisuga väidete kirjapanemiseks on predikaatarvutuses vaja väljendada ka mitmesuguseid funktsioone. Funktsioonid loeme määratuks samal põhihulgal, kus predikaadidki. Ka funktsioone võib jaotada klassidesse kohtade arvu järgi. Ühekohaline funktsioon on eeskiri, mis põhihulga igale elemendile seab vastavusse põhihulga mingi teise elemendi. Näiteks kui vaadeldavaks põhihulgaks on naturaalarvude hulk, siis võib osutuda vajalikuks ühekohaline funktsioon

$$x \mapsto x + 1$$

See funktsioon teisendab iga arvu ühe võrra suuremaks arvuks.

Kahekohaline funktsioon on eeskiri, mis põhihulga igale elemendipaarile seab vastavusse põhihulga mingi elemendi. Üldtuntud kahekohalised funktsioonid naturaalarvude hulgal on liitmine, lahutamine ja korrutamine, seega

$$x, y \mapsto x + y$$
$$x, y \mapsto x - y$$
$$x, y \mapsto x \cdot y$$

Jagamine selle definitsiooni kohaselt lubatavate funktsioonide hulka ei kuulu, sest suvalise kahe arvu jagatis ei pea olema naturaalarv (ega üldse arv nulliga jagamisel). Sobivad ainult sellised funktsioonid, mis annavad vastuse erandítult kõigi naturaalarvupaaride korral.

Samamoodi määratakse kolme-, nelja- ja enamakohaline funktsioon. Kolmekohalise funktsiooni näiteks võib tuua eeskirja

$$x, y, z \mapsto \max(x, y, z)$$

Analoogiliselt nullikohaliste predikaatidega võib defineerida ka nullikohalise funktsiooni. Sellise funktsiooni toime on lihtsalt ühe konkreetse elemendi fikseerimine põhihulgast. Nullikohalisel funktsioonil ei ole argumente, on ainult väärtus. Seepärast võib teda samastada konstandiga. Näiteks funktsioon, mis valib naturaalarvude hulgast välja arvu 0, on nullikohaline, samuti funktsioon, mis valib välja arvu 1 jne.

Funktsioonide tähistamiseks kasutatakse tavaliselt funktsionaalsümboleid f, g, h koos argumentidega. Näiteks $f(x)$ sobib ühekohalise ning $g(x, y)$ kahekohalise funktsiooni tähistamiseks. Konstante tähistatakse enamasti sümbolitega a, b, c.

Põhilisteks objektideks predikaatarvutuses on seega predikaadid, mille tähistamiseks kasutame eelpool loetletud predikaatsümboleid. Spetsiaalseid sümboleid, kvantoreid, kasutame põhihulga elementide määra tähistamiseks („kõik", „vähemalt üks"). Samuti kuuluvad vajalike objektide hulka põhihulgal määratud funktsioonid, mille tähistamiseks kasutame funktsionaalsümboleid. Peale selle on meil vaja sümboleid põhihulga elementide endi tähistamiseks, olgu nendeks nn. muutujasümboliteks x, y, z.

Oluline on tähele panna, et predikaadid ja predikaate tähistavad sümbolid on erinevad asjad samuti nagu on näiteks erinevad kaup ja seda tähistav vöötkood või inimene ja tema nimi. Samasugune eristamine oli muuseas kasutusel ka lausearvutuses.

2.2. Predikaatarvutuse süntaks

Predikaatarvutuse süntaks määrab kindlaks, milliseid avaldisi loeme predikaatarvutuse valemiks ja milliseid mitte. Vastav definitsioon koosneb kahest osast.

Definitsioon 1. Term.

1. Iga muutujasümbol on term.
2. Kui f on n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $f(t_1, \ldots, t_n)$ on term.
3. Rohkem terme ei ole.

Definitsioon 2. Predikaatarvutuse valem.

1. Kui P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \ldots, t_n)$ on predikaatarvutuse valem.
2. Kui $\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem, siis $\neg\mathcal{F}$ on predikaatarvtuse valem.
3. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on predikaatarvutuse valemid, siis $(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \sim \mathcal{G})$ on predikaatarvutuse valemid.
4. Kui x on muutujasümbol ja $\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem, siis $\exists x\mathcal{F}$ ja $\forall x\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valemid.
5. Rohkem predikaatarvutuse valemeid ei ole.

Sümbolit $\forall$ nimetatakse *üldisuse kvantoriks*, sümbolit $\exists$ aga *olemasolu kvantoriks*.

Muutujasümbolite esinemised valemis jagatakse seotud esinemisteks ja vabadeks esinemisteks. Muutuja x esinemist valemis $\mathcal{F}$ nimetatakse *seotuks*, kui x asub mingi kvantori mõjupiirkonnas, st. esineb valemi $\mathcal{F}$ osavalemis $\forall x\mathcal{G}$ või $\exists x\mathcal{G}$. Ülejäänud esinemisi nimetatakse *vabadeks*. Üks ja sama muutuja võib valemis esineda korraga nii seotult kui vabalt. Valemit nimetatakse *kinniseks*, kui tema kõigi muutujate kõik esinemised on seotud.

Definitsioonides 1 ja 2 toodud induktiivset protsessi järgides saab koostada näiteks predikaatarvutuse valemi

$$(\exists x P(x, f(y)) \vee \neg \forall y Q(y, g(a, h(z)), y))$$

Siin on P kahekohaline ja Q kolmekohaline predikaatsümbol, f ja h on ühekohalised funktsionaalsümbolid, g aga kahekohaline, a on konstantsümbol (ehk nullikohaline funktsionaalsümbol) ning x, y, z muutujasümbolid. Muutujasümboli x ainus esinemine on seotud, muutujasümboli y esimene esinemine on vaba, ülejäänud aga seotud, muutujasümboli z ainus esinemine on vaba. Valem ei ole kinnine, sest osa muutujaid esineb vabalt. Loeme üles ka kõik termid, mis selles valemis esinevad:

$$x \qquad y \qquad f(y) \qquad a \qquad z \qquad h(z) \qquad g(a, h(z))$$

Valemid on käesoleval hetkel puhtalt sümbolite järjendid, ilma „sisuta“ ja nii tuleb neid ka võtta. Ei definitsioon 1 ega definitsioon 2 ei ütle midagi selle kohta, mida predikaatarvutuse valemid tähendavad. Näiteks ei saa küsida, millist lauset väljendab ülal vaadeldud kahe predikaatsümboliga valem, sest me ei tea, kas see valem on määratud väljendama mingit väidet naturaalarvude, inimeste, geomeetriliste kujundite või millegi muu kohta. Küsimuse valemi tähendusest võtamegi vaatluse alla järgmisena.

2.3. Predikaatarvutuse semantika

Definitsioon 3. Struktuur on paar $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, kus $U_\mathcal{A}$ on mingi mittetühi hulk, mida nimetatakse *põhihulgaks* ehk *universumiks* ja $I_\mathcal{A}$ on *interpreteeriv kujutus*, mis teisendab

a) iga n-kohalise predikaatsümboli n-kohaliseks predikaadiks hulgal $U_\mathcal{A}$;
b) iga n-kohalise funktsionaalsümboli n-kohaliseks funktsiooniks hulgal $U_\mathcal{A}$;
c) iga muutujasümboli hulga $U_\mathcal{A}$ mingiks elemendiks.

Lühiduse mõttes tähistame $I_\mathcal{A}(P) = P^\mathcal{A}$, $I_\mathcal{A}(f) = f^\mathcal{A}$, $I_\mathcal{A}(x) = x^\mathcal{A}$.

Struktuur näitab seega, kuidas tuleb valemit mõista. Kogu interpretatsiooni aluseks on põhihulk $U_\mathcal{A}$. Sellel hulgal saab defineerida üldiselt palju erinevaid predikaate ja funktsioone ning valida mitmel eri viisil elemente.

Seda, missugused predikaadid, funktsioonid ja elemendid kogu sellest mitmekesisusest olulised on, näitab kujutus $I_{\mathcal{A}}$.

Interpreteeriva kujutuse toimet võib selgitata järgmiselt. Oletame, et valem sisaldab n-kohalist predikaatsümbolit P. Interpreteeriv kujutus valib kõigi põhihulgal defineeritud n-kohaliste predikaatide hulgast välja ühe ja omistab selle predikaatsümboli P tähenduseks. Sama tehakse kõigi teiste valemis esinevate predikaatsümbolitega. Kui valem sisaldab n-kohalist funktsionaalsümbolit f, siis interpreteeriv kujutus valib kõigi põhihulgal defineeritud n-kohaliste funktsioonide hulgast välja ühe ja omistab selle funktsionaalsümboli f tähenduseks. Samuti kõigi teiste funktsionaalsümbolitega. Lõpuks, kui valem sisaldab muutujasümbolit x, siis interpreteeriv kujutus valib põhihulga elementide seast välja ühe elemendi ja omistab selle muutujasümboli x tähenduseks.

Valemis esinev süntaktiline objekt ja tema interpretatsioon on kaks ise asja, mida tuleb teineteisest lahus hoida. Näiteks predikaatsümbol P kujutab endast paljalt tähte, sümbolit, tema interpretatsioon $P^{\mathcal{A}}$ seevastu põhihulgal määratud predikaati.

Vaatleme näiteks eelmises jaotises käsitletud valemit ja defineerime struktuuri $\mathcal{A}$ järgmiselt.

$$
\begin{array}{ll}
U_{\mathcal{A}} & = \{0, 1, 2, \ldots\} \\
P^{\mathcal{A}}(p, q) & = \text{„}p > q\text{“} \\
Q^{\mathcal{A}}(p, q, r) & = \text{„arvud } p,\ q,\ r \text{ on kõik võrdsed“} \\
f^{\mathcal{A}}(p) & = p + 1 \\
g^{\mathcal{A}}(p, q) & = p + q \\
h^{\mathcal{A}}(p) & = p - 1 \\
a^{\mathcal{A}} & = 0 \\
y^{\mathcal{A}} & = 2 \\
z^{\mathcal{A}} & = 3
\end{array}
$$

Tähenduse, mille valem omandab selles struktuuris, võib kirja panna lausega „leidub arv, mis on suurem kui talle järgnev arv või pole nii, et suvaline naturaalarv langeb kokku nii arvuga $0 + (3 - 1)$ kui iseendaga“. See lause on tõene.

Struktuuri mõistega määrati vastavus valemi sümbolite ja konkreetsete predikaatide, funktsioonide ja elementide vahel. Kui see vastavus on teada, siis saab leida valemi tõeväärtuse antud struktuuris.

Järgnevalt defineerime termi väärtuse ning selle abil valemi tõeväärtuse. Mõlemad definitsioonid on induktiivsed, st. esitavad eeskirja, kuidas lihtsamate avaldiste väärtuste abil leida keerulisemate avaldiste väärtusi.

Definitsioon 4. Termi väärtus.

1. Kui t on muutujasümbol, st. $t = x$, siis

$$\mathcal{A}(t) = x^{\mathcal{A}}$$

2. Kui $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, kus t_1, …, t_n on termid ja f on n-kohaline funktsionaalsümbol, siis

$$\mathcal{A}(t) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$$

Definitsioon 5. Valemi tõeväärtus

1. Kui $\mathcal{F} = P(t_1, \ldots, t_n)$, kus t_1, …, t_n on termid ja P on n-kohaline predikaatsümbol, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $P^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}) = t$.
2. Kui $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = v$.
3. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t$ ja $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = t$.
4. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t$ või $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = t$.
5. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = v$ või $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = t$.
6. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t$ ja $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = t$ või $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = v$ ja $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = v$.
7. Kui $\mathcal{F} = \forall x\mathcal{G}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui põhihulga iga elemendi $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = t$, kus $[x/u]$ tähendab, et muutujasümboli x interpretatsiooniks võetakse element u.
8. Kui $\mathcal{F} = \exists x\mathcal{G}$, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = t$ parajasti siis, kui põhihulgas leidub element $u \in U_{\mathcal{A}}$, et $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = t$, kus $[x/u]$ tähendab, et muutujasümboli x interpretatsiooniks võetakse element u.

Arusaadavalt võib ühel ja samal valemil olla erinevates struktuurides erinev tõeväärtus. Vaatleme näiteks valemit

$$\forall x \exists y P(x, y).$$

Valime struktuuri $\mathcal{A}$, milles põhihulk ja predikaadi P interpretatsioon on antud järgnevalt.

$$U_{\mathcal{A}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$P^{\mathcal{A}}(a, b) = \text{„}a > b\text{“}$$

Valem omandab selles struktuuris tähenduse „iga naturaalarvu jaoks leidub temast väiksem naturaalarv“. Selline väide ei kehti näiteks naturaalarvu 0 korral. Järelikult on valemi tõeväärtus selles struktuuris väär.

Olgu nüüd vaatluse all struktuur $\mathcal{B}$, kus põhihulk ja predikaadi P interpretatsioon on järgmised:

$$U_{\mathcal{B}} = \{\text{kõik inimesed}\}$$
$$P^{\mathcal{B}}(a, b) = \text{"}a \text{ armastab } b\text{-d“}$$

Valemi tähenduseks on nüüd „iga inimene armastab mingit inimest (võib-olla iseennast)“. Niisugune väide on tõenäoliselt väär, sest arvatavasti leidub selliseid inimesi, kes kedagi ei armasta. Ka selles struktuuris väljendab valem väära väidet.

Võtame lõppeks struktuuri $\mathcal{C}$, milles

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\ P^{\mathcal{A}}(a, b) &= „a < b“ \end{aligned}$$

Struktuuris $\mathcal{C}$ on valemi tähenduseks „iga naturaalarvu jaoks leidub temast suurem naturaalarv". See lause on ilmselt tõene, selliseks arvuks sobib näiteks antud arvule vahetult järgnev arv. Vaadeldavas struktuuris on valemi tõeväärtus järelikult tõene.

Valemi tõeväärtuse definitsioonis 5 esineb struktuuri $\mathcal{A}$ kõrval veel ka struktuur $\mathcal{A}_{[x/u]}$. Need kaks struktuuri langevad teineteisega kokku kõikjal, ainus erinevus on muutujasümboli x interpretatsioon. Struktuuris $\mathcal{A}$ võib muutujasümbolile x olla antud definitsiooniga 3 tähenduseks mingi element põhihulgast, või jäetud tema tähendus hoopis määramata (kui muutujasümbol x ei esine valemis vabalt). Sõltumata sellest omistatakse struktuuris $\mathcal{A}_{[x/u]}$ muutujasümboli x tähenduseks põhihulga element u.

Üldiselt ei pruugi tõeväärtused $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ ja $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F})$ kokku langeda, sest struktuuris $\mathcal{A}$ võib muutujasümboli x interpretatsiooniks olla mingi u-st erinev element. Kuna valemi tõeväärtus sõltub üldjuhul sellest, kuidas omistatakse tähendus tema vabadele muutujatele, võib valemi tõeväärtus muutuda, kui nüüd struktuuris $\mathcal{A}_{[x/u]}$ võetakse muutujasümboli x tähenduseks element u. Seevastu kui valem $\mathcal{F}$ ei sisalda muutujat x vabalt, siis $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F})$, sest valemi tõeväärtus ei sõltu niisugusel juhul sellest, milline on muutujasümboli x tähendus.

Asjaolu, et valem $\mathcal{F}$ on struktuuris $\mathcal{A}$ tõene, tähistatakse

$$\mathcal{A} \models \mathcal{F}.$$

Sellisel juhul nimetatakse struktuuri $\mathcal{A}$ valemi $\mathcal{F}$ *mudeliks*. Vastupidist asjaolu, st. et valem $\mathcal{F}$ on struktuuris $\mathcal{A}$ väär ehk struktuur $\mathcal{A}$ ei ole valemi $\mathcal{F}$ mudel, tähistatakse

$$\mathcal{A} \not\models \mathcal{F}.$$

Analoogiliselt lausearvutuse valemitega võib ka predikaatarvutuse valemite hulgast eraldada välja spetsiaalsed valemiklassid.

Definitsioon 6. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse kehtestatavaks, kui tal leidub mudel. See tähendab, leidub struktuur $\mathcal{A}$ nii, et $\mathcal{A} \models \mathcal{F}$.

Definitsioon 7. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt tõeseks, kui iga struktuur on tema mudeliks. See tähendab, et iga struktuuri $\mathcal{A}$ korral $\mathcal{A} \models \mathcal{F}$.

Definitsioon 8. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt vääraks, kui ükski struktuur pole tema mudeliks. See tähendab, et iga struktuuri $\mathcal{A}$ korral $\mathcal{A} \not\models \mathcal{F}$.

Asjaolu, et valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene, märgitakse

$$\models \mathcal{F}$$

Vastupidist asjaolu, et valem $\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene, märgitakse

$$\not\models \mathcal{F}$$

Viimane kirjutis ei tähenda seda, et valem $\mathcal{F}$ on samaselt väär.

Neid kolme valemiklassi seovad samasugused omadused nagu lausearvutuseski. Ka väidete tõestused on sarnased.

Omadus 1. Valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui valem $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär.

Omadus 2. Valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav parajasti siis, kui valem $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene.

Kokkuvõttes on predikaatarvutuse valemitel kaks aspekti – süntaks ja semantika. Süntaks määrab valemite üleskirjutamise reeglid, semantika näitab, kuidas anda valemitele tähendus.

2.4. Predikaatloogika põhiseadused

Nii nagu lausearvutuseski tekib ka predikaatarvutuses vajadus valemite teisendamise järele. Selleks on aga vaja samaväärsusi, mis kehtiksid ka predikaatarvutuse valemite puhul. Käesolevas jaotises esitamegi mõningad niisugused samaväärsused.

Definitsioon 9. Ütleme, et valemist $\mathcal{F}$ järeldub valem $\mathcal{G}$, kui igas struktuuris, kus valem $\mathcal{F}$ on tõene, on ka valem $\mathcal{G}$ tõene.

Definitsioon 10. Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse samaväärseteks, kui nende tõeväärtused langevad kokku igas struktuuris.

Need kaks definitsiooni on omavahel seotud: valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ samaväärsed parajasti siis, kui valemist $\mathcal{F}$ järeldub valem $\mathcal{G}$ ja valemist $\mathcal{G}$ järeldub valem $\mathcal{F}$.

Kõik lausearvutuse põhisamaväärsused kehtivad ka predikaatarvutuses. Näiteks De Morgani seadused

$$\neg(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$$
$$\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \,\&\, \neg\mathcal{G}$$

kehtivad sõltumata sellest, kas $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lause- või predikaatarvutuse valemid. Vasak ja parem pool on samaväärsed tänu nende valemite erilisele kombineerimisviisile.

Predikaatarvutuses on aga samaväärseid lauseid, mille samaväärsust ei ole võimalik tõestada lausearvutuse vahenditega. Näiteks

$\neg\forall x A(x)$	pole nii, et kõik on ausad
$\exists x \neg A(x)$	leidub neid, kes pole ausad

Need laused väljendavad sisuliselt sama asja. Taolisi lausepaare on predikaatarvutuses veelgi.

Predikaatarvutuse spetsiifilised samaväärsused käsitlevad kvantorite seost teiste kvantorite ja lausearvutuse tehetega. Põhilisemad nendest samaväärsustest on järgmised.

1. Kvantori ja eituse vahetamisseadus

$$\neg\forall x\mathcal{F} \equiv \exists x\neg\mathcal{F}$$
$$\neg\exists x\mathcal{F} \equiv \forall x\neg\mathcal{F}$$

2. Kvantorite osaline distributiivsus

$$\forall x\mathcal{F} \,\&\, \forall x\mathcal{G} \equiv \forall x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$$
$$\exists x\mathcal{F} \vee \exists x\mathcal{G} \equiv \exists x(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$$

3. Kui muutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis

$$\forall x\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \equiv \forall x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$$
$$\forall x\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \forall x(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$$
$$\exists x\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \equiv \exists x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$$
$$\exists x\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \exists x(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$$

4. Kui muutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis

$$\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G} \equiv \exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$$
$$\exists x\mathcal{F} \supset \mathcal{G} \equiv \forall x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$$

Kui muutuja x ei esine valemis $\mathcal{F}$ vabalt, siis

$$\mathcal{F} \supset \forall x\mathcal{G} \equiv \forall x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$$
$$\mathcal{F} \supset \exists x\mathcal{G} \equiv \exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$$

5. Samaliigiliste kvantorite vahetamisseadus

$$\forall x\forall y\mathcal{F} \equiv \forall y\forall x\mathcal{F}$$
$$\exists x\exists y\mathcal{F} \equiv \exists y\exists x\mathcal{F}$$

Neid samaväärsusi tõestatakse tavaliselt näidates, et seose vasakust poolest järeldub parem pool ja paremast poolest järeldub vasak pool. Järeldumise mõiste kohaselt (definitsioon 9) tuleb selleks valida struktuur, milles seose üks pool on tõene ja näidata, et siis ka teine pool on tõene. Kui mõlemas suunas järeldumine on tõestatud, siis võib väita, et valemid on samaväärsed.

Põhjendame mõned nendest samaväärsustest, jättes ülejäänud iseseisvaks harjutuseks.

1. grupi esimene samaväärsus. Tõestame kõigepealt, et valemist $\neg\forall x\mathcal{F}$ järeldub valem $\exists x\neg\mathcal{F}$. Olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\neg\forall x\mathcal{F}) = t.$$

Siis ilmselt

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = v.$$

See tähendab, et mitte iga $u \in U_\mathcal{A}$ korral $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F}) = t$, vaid leidub $u_0 \in U_\mathcal{A}$, et

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F}) = v.$$

Siis aga

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\neg\mathcal{F}) = t$$

ja olemasolu kvantori definitsiooni kohaselt

$$\mathcal{A}(\exists x\neg\mathcal{F}) = t.$$

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\neg\forall x\mathcal{F}$ on tõene, on ka valem $\exists x\neg\mathcal{F}$ tõene.

Tõestame nüüd vastupidi, et valemist $\exists x\neg\mathcal{F}$ järeldub valem $\neg\forall x\mathcal{F}$. Olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\exists x\neg\mathcal{F}) = t.$$

Siis peab leiduma element $u_0 \in U_\mathcal{A}$, et

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\neg\mathcal{F}) = t.$$

Siit saame, et

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F}) = v$$

ja kuna leidub element, et valem $\mathcal{F}$ on väär, siis

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = v.$$

Järelikult

$$\mathcal{A}(\neg\forall x\mathcal{F}) = t.$$

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\exists x\neg\mathcal{F}$ on tõene, on ka valem $\neg\forall x\mathcal{F}$ tõene.

Tõestatut kokku võttes näeme, et valemid $\neg\forall x\mathcal{F}$ ja $\exists x\neg\mathcal{F}$ on samaväärsed. $\square$

3. grupi esimene samaväärsus. Tõestame kõigepealt, et valemist $\forall x\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}$ järeldub valem $\forall x(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})$. Olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}) = t.$$

Siis vastavalt konjunktsiooni definitsioonile

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = t \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A}(\mathcal{G}) = t.$$

Kuna $\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = t$, siis iga $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F}) = t.$$

Et muutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G})$. Järelikult ka

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = t.$$

Saame, et iga $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F}) = t \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = t,$$

mis tähendab, et iga $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}) = t.$$

Üldisuse kvantori definitsiooni põhjal siis

$$\mathcal{A}(\forall x(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})) = t.$$

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\forall x\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}$ on tõene, on ka valem $\forall x(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})$ tõene, eeldusel, et valem $\mathcal{G}$ ei sisalda muutujat x vabalt.

Tõestame nüüd vastupidi, et valemist $\forall x(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})$ järeldub valem $\forall x\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}$. Olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\forall x(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})) = t.$$

See tähendab, et suvalise $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}) = t,$$

millest saame, et

$$\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F}) = t \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = t.$$

Nüüd kuna iga $u \in U_{\mathcal{A}}$ korral $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{F}) = t$, siis

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = t.$$

Et muutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis $\mathcal{A}_{[x/u]}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{G})$, mistõttu

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t.$$

Konjunktsiooni definitsiooni kohaselt

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}) = t.$$

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\forall x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$ on tõene, on ka valem $\forall x\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}$ tõene, eeldusel, et valem $\mathcal{G}$ ei sisalda muutujat x vabalt.

Tõestatut kokku võttes näeme, et valemid $\forall x\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}$ ja $\forall x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$ on samaväärsed. □

4. grupi esimene samaväärsus. Tõestame, et valemist $\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ järeldub valem $\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$. Olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t.$$

Implikatsioon on tõene kahel juhul: siis, kui eesliige on väär või siis, kui tagaliige on tõene.

1) Kui $\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = v$, siis peab leiduma element $u_0 \in U_{\mathcal{A}}$, et

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F}) = v.$$

Sel juhul aga

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t$$

ja vastavalt olemasolu kvantori definitsioonile

$$\mathcal{A}(\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})) = t.$$

2) Kui $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t$, siis tänu sellele, et muutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, kehtib vabalt valitud $u_0 \in U_{\mathcal{A}}$ korral

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{G}) = t.$$

Järelikult

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t,$$

millest saame, et

$$\mathcal{A}(\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})) = t.$$

Sellega on mõlemad juhud läbi vaadatud.

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ on tõene, on ka valem $\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$ tõene, eeldusel, et valem $\mathcal{G}$ ei sisalda muutujat x vabalt.

Vastupidi, olgu $\mathcal{A}$ selline struktuur, et

$$\mathcal{A}(\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})) = t.$$

See tähendab, et leidub element $u_0 \in U_{\mathcal{A}}$, et

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t.$$

Oletame vastuväiteliselt, et

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = v.$$

Siis peab olema

$$\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = t \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A}(\mathcal{G}) = v.$$

Kuna $\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F}) = t$, siis ka elemendi u_0 korral

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F}) = t.$$

Enne saime, et $\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t$, järelikult

$$\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{G}) = t.$$

Kuna valem $\mathcal{G}$ ei sisalda muutujat x vabalt, siis $\mathcal{A}_{[x/u_0]}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{G})$ ja seega ka

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = t.$$

Tulemus on vastuolus eelnevas saadud võrdusega $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = v$. See tähendab, et oletus $\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = v$ ei pea paika ja peab olema $\mathcal{A}(\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) = t$.

Seega igas struktuuris $\mathcal{A}$, kus valem $\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$ on tõene, on ka valem $\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ tõene, eeldusel, et valem $\mathcal{G}$ ei sisalda muutujat x vabalt.

Tõestatut kokku võttes näeme, et valemid $\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ ja $\exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$ on samaväärsed. $\square$

Ülejäänud samaväärsusi (ka neid, mis eelnevas loendis kirjas ei ole) saab tõestada analoogiliste arutlustega.

Asudes põhjendama predikaatarvutuse põhisamaväärsuste kehtivust, pole meil algselt, esimese samaväärsuse korral, kasutada midagi peale vahetu definitsiooni. Kõigi ülejäänute juures võib aga rakendada juba tõestatud samaväärsusi. Kui oleme näidanud, et samaväärsused 1.–3. peavad paika, võime viimase tõestuse asendada hoopis lühemaga:

$$\begin{aligned}
\forall x\mathcal{F} \supset \mathcal{G} &\equiv \neg\forall x\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \\
&\equiv \exists x\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \\
&\equiv \exists x(\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \\
&\equiv \exists x(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})
\end{aligned}$$

Seega on kahe valemi samaväärsuse tõestamiseks vähemasti kaks võimalust: kas lähtuda otse definitsioonist, nagu me tegime eelnevas, või teisendada valemeid teadaolevate samaväärsuste abil, nagu me tegime nüüd. Loomulikult on võimalik ka nende kahe meetodi kombinatsioon.

Samu meetodeid kasutatakse ka siis, kui on vaja tõestada, et mingi valem on samaselt tõene või samaselt väär.

Ülalpool toodud samaväärsuste loendit vaadeldes võib arvata, et analoogilisi samaväärsusi peaks leiduma teisigi. Näiteks 2. grupis üldisuse kvantori ja disjunktsiooni ning olemasolu kvantori ja konjunktsiooni vahel. Tegelikult pole niisugused samaväärsused üldkehtivad, see tähendab

$$\forall x\mathcal{F} \vee \forall x\mathcal{G} \not\equiv \forall x(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$$
$$\exists x\mathcal{F} \,\&\, \exists x\mathcal{G} \not\equiv \exists x(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$$

Esimesel juhul järeldub vasakust poolest parem pool, aga mitte vastupidi, teisel juhul järeldub paremast poolest vasak pool, aga mitte vastupidi. Selles, et teistpidised järeldumised ei kehti, võib veenduda lihtsasti, kui võtta

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}} &= \mathbb{N} \\ \mathcal{F}^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{A}}(n) &= \text{„}n \text{ on paarisarv“} \\ \mathcal{G}^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}}(n) &= \text{„}n \text{ on paaritu arv“} \end{aligned}$$

Esimesel juhul on parem pool tõene ja vasak pool väär, sest kuigi iga arv on kas paaris või paaritu, ei ole kõik arvud paaris ega ka kõik arvud paaritud. Teisel juhul on vasak pool tõene ja parem pool väär, sest kuigi leidub nii paarisarve kui ka paarituid arve, pole ükski arv korraga paaris ja paaritu.

Samamoodi ei või üldiselt vahetada eriliigilisi kvantoreid, see tähendab

$$\exists x\forall y\mathcal{F} \not\equiv \forall y\exists x\mathcal{F}$$
$$\forall x\exists y\mathcal{F} \not\equiv \exists y\forall x\mathcal{F}$$

Siin kehtib esimesel juhul implikatsioon vasakult paremale, kuid mitte vastupidi, teisel juhul aga implikatsioon paremalt vasakule, kuid mitte vastupidi.

2.5. Valemi prefikskuju

Predikaatarvutuse valemi prefikskuju on lähtekoht paljudele algoritmidele, näiteks teoreemide automaattõestamises ja tehisintellektisüsteemides kasutatavale resolutsioonimeetodile. Prefikskujul olevas valemis on kõik kvantorid koondatud valemi etteotsa. Täpsema määratluse annab järgmine definitsioon.

Definitsioon 11. Ütleme, et valem $\mathcal{F}$ on prefikskujul, kui ta on esitatud kujul

$$\mathcal{F} = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \mathcal{F}',$$

kus Q_1, Q_2, ..., Q_n on kvantorid, x_1, x_2, ..., x_n muutujad ning valem $\mathcal{F}'$ ei sisalda kvantoreid. Valemit $\mathcal{F}'$ nimetatakse valemi $\mathcal{F}$ *maatriksiks.*

Järgnevas asume tegelema küsimusega, kuidas viia valemit prefikskujule. Selles tuleb tegemist seotud muutujate ümbernimetamisega. Olgu meil näiteks valem

$$\forall x \mathcal{F}.$$

Oletame, et selles valemis ei esine muutujat y ei seotult ega vabalt. Siis me võime ilmselt kõik muutuja x esinemised, mis asuvad kvantori mõjupiirkonnas, asendada muutujaga y, tulemus jääb esialgse valemiga samaväärseks. Seega saame algse valemi asemele valemi

$$\forall y \mathcal{F}[x/y].$$

Operatsioon, kus seotud muutuja asendatakse kvantori mõjupiirkonnas mingi valemis mitteesineva muutujaga, on seotud muutuja ümbernimetamine. Oluline on siinjuures, et uus muutuja erineb kõigist senistest, sest vastasel korral ei pruugi me saada samaväärset valemit.

Teoreem 1. Iga valemi jaoks leidub temaga samaväärne valem prefikskujul.

Tõestus. Olgu $\mathcal{F}$ suvaline predikaatarvutuse valem. Tõestame teoreemi induktsiooniga valemi struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui $\mathcal{F}$ on kujul $P(t_1, \dots, t_n)$, kus P on n-kohaline predikaatsümbol ja t_1, ..., t_n on termid, siis valemil $\mathcal{F}$ on juba nõutav kuju.

Induktsiooni samm. Vaatleme eraldi juhte valemi ehituse järgi.

Juht 1. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\neg\mathcal{F}_1$. Induktsiooni eelduse põhjal leidub valemiga $\mathcal{F}_1$ samaväärne valem $\mathcal{G}_1$, mis on prefikskujul. Olgu valemil $\mathcal{G}_1$ kuju

$$\mathcal{G}_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \mathcal{G}_1',$$

kus $\mathcal{G}_1$ ei sisalda kvantoreid. Leides mõlemast poolest eituse, saame algse valemiga $\mathcal{F}$ samaväärse valemi. Kvantori ja eituse vahetamisseaduste põhjal siis

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv \neg(Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \mathcal{G}_1') \\ &\equiv \overline{Q_1} x_1 \overline{Q_2} x_2 \dots \overline{Q_n} x_n \neg \mathcal{G}_1' \end{aligned}$$

kus

$$\overline{Q_i} = \begin{cases} \exists, & \text{kui } Q_i = \forall \\ \forall, & \text{kui } Q_i = \exists \end{cases}$$

Niimoodi saame valemiga $\mathcal{F}$ samaväärse valemi prefikskujul.

Juht 2. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2$. Induktsiooni eelduse põhjal leiduvad valemiga $\mathcal{F}_1$ samaväärne valem $\mathcal{G}_1$ ja valemiga $\mathcal{F}_2$ samaväärne valem $\mathcal{G}_2$, mis mõlemad on prefikskujul. Nimetades vajaduse korral valemites $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ seotud muutujaid ümber, võime eeldada, et need valemid ei sisalda ühiseid seotud muutujaid ja et seotud muutujad erinevad vabadest muutujatest. Olgu

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= Q_{11}x_1Q_{12}x_2\ldots Q_{1n_1}x_{n_1}\mathcal{G}_1'\\ \mathcal{G}_2 &= Q_{21}y_1Q_{22}y_2\ldots Q_{2n_2}y_{n_2}\mathcal{G}_2'\end{aligned}$$

kus valemid $\mathcal{G}_1'$ ja $\mathcal{G}_2'$ ei sisalda kvantoreid. Siis valem $\mathcal{G}_1 \,\&\, \mathcal{G}_2$ on samaväärne valemiga $\mathcal{F}$ ning predikaatarvutuse samaväärsuste loendi 3. grupist ja konjunktsiooni kommutatiivsusest saame

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv Q_{11}x_1Q_{12}x_2\ldots Q_{1n_1}x_{n_1}\mathcal{G}_1' \,\&\, Q_{21}y_1Q_{22}y_2\ldots Q_{2n_2}y_{n_2}\mathcal{G}_2'\\ &\equiv Q_{11}x_1Q_{12}x_2\ldots Q_{1n_1}x_{n_1}(\mathcal{G}_1' \,\&\, Q_{21}y_1Q_{22}y_2\ldots Q_{2n_2}y_{n_2}\mathcal{G}_2')\\ &\equiv Q_{11}x_1Q_{12}x_2\ldots Q_{1n_1}x_{n_1}(Q_{21}y_1Q_{22}y_2\ldots Q_{2n_2}y_{n_2}\mathcal{G}_2' \,\&\, \mathcal{G}_1')\\ &\equiv Q_{11}x_1Q_{12}x_2\ldots Q_{1n_1}x_{n_1}Q_{21}y_1Q_{22}y_2\ldots Q_{2n_2}y_{n_2}(\mathcal{G}_2' \,\&\, \mathcal{G}_1')\end{aligned}$$

Viimane valem ongi prefikskujul.

Juht 3. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$. Kahekordse eituse ja De Morgani seaduse abil teisendame selle valemi kujule $\neg(\neg\mathcal{F}_1 \,\&\, \neg\mathcal{F}_2)$ ning rakendame juhte 1 ja 2.

Juht 4. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. Teisendame valemi kujule $\neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ning rakendame juhte 1 ja 3.

Juht 5. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$. Teisendame valemi kujule $\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2 \vee \neg\mathcal{F}_1 \,\&\, \neg\mathcal{F}_2$ ning rakendame juhte 1, 2 ja 3.

Juht 6. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\forall x\mathcal{F}_1$. Induktsiooni eelduse põhjal leidub valemiga $\mathcal{F}_1$ samaväärne valem $\mathcal{G}_1$, mis on prefikskujul. Nimetades vajaduse korral valemis $\mathcal{G}_1$ seotud muutujaid ümber, võime eeldada, et valemi $\mathcal{G}_1$ seotud muutujad erinevad muutujast x. Olgu

$$\mathcal{G}_1 = Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{G}_1',$$

kus $\mathcal{G}_1$ ei sisalda kvantoreid. Siis

$$\mathcal{F} \equiv \forall xQ_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{G}_1'$$

mis ongi otsitav prefikskuju.

Juht 7. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\exists x\mathcal{F}_1$. Teisendame valemi kujule $\neg\forall x\neg\mathcal{F}_1$ ning rakendame juhte 1 ja 6. □

Saab formuleerida ka algoritm valemi viimiseks prefikskujule. Variante selleks on mitmeid, järgnevas esitame ühe võimaluse. Olgu antud valem $\mathcal{F}$, mis on vaja viia prefikskujule. Võib tegutseda nii.

1. Elimineerida implikatsioonid ja ekvivalentsid:

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H} \equiv \neg\mathcal{G} \vee \neg\mathcal{H}$$
$$\mathcal{G} \sim \mathcal{H} \equiv \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \vee \neg\mathcal{G} \,\&\, \neg\mathcal{H}$$

2. Nimetada seotud muutujad ümber nii, et iga kvantor viitaks erinevale seotud muutujale ja et seotud muutujad erineksid kõigist vabadest muutujatest.
3. Viia eitused kvantorite alla: asendada

$$\neg\forall x\mathcal{G} \Rightarrow \exists x\neg\mathcal{G}$$
$$\neg\exists x\mathcal{G} \Rightarrow \forall x\neg\mathcal{G}$$

4. Arvestades, et kõik kvantorid viitavad erinevatele muutujatele ja seotud muutujad erinevad vabadest, kasutada seadusi

$$\forall x\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \equiv \forall x(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H})$$
$$\forall x\mathcal{G} \vee \mathcal{H} \equiv \forall x(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$$
$$\exists x\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \equiv \exists x(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H})$$
$$\exists x\mathcal{G} \vee \mathcal{H} \equiv \exists x(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$$

   ja tuua kvantorid esimese osavalemi eest sulgude ette. Seejärel, arvestades konjunktsiooni ja disjunktsiooni kommutatiivsust, tuua kvantorid sulgude ette esimese osavalemi eest.

Teisendame näiteks valemi $\forall x\exists yP(x, g(y, f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg\forall xR(x, y)$ prefikskujule:

$$\begin{aligned}
&\forall x\exists yP(x, g(y, f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg\forall xR(x, y) \\
&\qquad \equiv \forall x\exists uP(x, g(u, f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg\forall vR(v, y) \\
&\qquad \equiv \forall x\exists u(P(x, g(u, f(x))) \vee \neg Q(z)) \vee \exists v\neg R(v, y) \\
&\qquad \equiv \forall x\exists u\exists v(P(x, g(u, f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(v, y))
\end{aligned}$$