Matemaatilise loogika elemendid

Reimo Palm

Kursuse konspekt

Sissejuhatus

Loogika laias tähenduses on teadus õigest mõtlemisest. Tema alusepanijaks loetakse antiikkreeka teaduse suurkuju Aristotelest (384–322 e.m.a.), kes arendas välja põhjaliku deduktsiooniõpetuse, nn. süllogistika. Matemaatiline loogika on loogika haru, milles loogikaprobleemide käsitlemiseks kasutatakse matemaatilisi meetodeid.

Matemaatilise loogika eelkäijaks on 17. sajandi saksa filosoof ja matemaatik G. W. Leibniz, kes esitas ideed luua ühtne matemaatikal baseeruv teaduskeel (*lingua universalis*) ja loogiline märgisüsteem (*calculus ratiocinator*). Iseseisva haruna hakkas matemaatiline loogika arenema alles 19. sajandil: G. Boole ja A. De Morgan avaldasid sajandi keskel esimesed Aristotelese loogika matemaatilised käsitlused, millest arenes lõpuks välja lausearvutus, G. Frege ja C. Peirce'i tööd, kus kasutati predikaate, indiviidmuutujaid ja kvantoreid, said predikaatarvutuse aluseks.

Käesolev kursus kujutab endast sissejuhatust matemaatilisse loogikasse ja temaga seotud valdkondadesse. Esimeses peatükis käsitleme matemaatilise loogika lihtsaimat osa, lausearvutust, mis uurib, kuidas lihtlausetest teatud seoste abil moodustada liitlauseid. Teises peatükis on vaatluse all predikaatarvutus, kus toome lausearvutuse täiendusena lisaks sisse predikaadid ja kvantorid. Kolmas peatükk käsitleb aksiomaatilisi teooriaid ehk küsimust: mida tähendab tõestada teoreem aksioomidest lähtudes. Neljanda peatüki sisuks on sissejuhtatus algoritmiteooriasse, peamiselt vaatleme seal ühte algoritmi mõiste formalisatsiooni – Turingi masinat.

1. Lausearvutus

1.1. Lausearvutuse põhimõisted

Lausearvutuse põhiprobleem on välja selgitada, kuidas liitlause tõeväärtus sõltub tema komponentideks olevate lihtlausete tõeväärtustest.

Liitlaused moodustatakse lihtlausetest teatud grammatiliste seoste abil, nagu *ja*, *või* jt. Näiteks võivad lihtlaused olla

$$A = \text{„Tallinn on Eesti pealinn“}$$
$$B = \text{„Tuvi on rändlind“}$$

Nendest lihtlausetest saab moodustada liitlaused

$$A \mathbin{\&} B = \text{„Tallinn on Eesti pealinn ja tuvi on rändlind“}$$
$$A \vee B = \text{„Tallinn on Eesti pealinn või tuvi on rändlind“}$$

Meie üldiste arusaamade kohaselt on lause A tõene ning lause B väär. Lause $A \mathbin{\&} B$ on väär, sest juba B on väär, lause $A \vee B$ on tõene, sest A on tõene.

Kõigi lausete kohta eeldatakse järgmist.

1. *Välistatud kolmanda seadus.* Iga lause on kas tõene või väär.
2. *Mittevasturääkivuse seadus.* Ükski lause pole korraga tõene ja väär.

Esimene tingimus tähendab seda, et käsitletavate lausetena tulevad kõne alla vaid sellised laused, mis midagi väidavad. Kõrvale jäävad muuhulgas kõik küsi- ja hüüdlaused, samuti laused, mille tõeväärtus on teadmata. Teine tingimus välistab näiteks paradokse väljendavad laused, mille tõeväärtust ei saa üheselt määrata.

Lihtlausete tähistamiseks kasutame suuri ladina tähti A, B, C, $\ldots$, vajaduse korral koos indeksitega. Neid nimetame *lausemuutujateks.* Lausearvutuses ei huvita meid, milliseid konkreetseid lauseid lausemuutujad tähistavad ega ka mitte, kuidas leida lausemuutujate tõeväärtusi. Lausearvutus tegeleb sellega, kuidas leida keerulisema lause tõeväärtust, kui lihtsamate lausete tõeväärtused on teada. Seda, kuidas lihtsamatest lausetest moodustada keerulisemaid, näitab lausearvutuse valemi definitsioon.

Definitsioon 1. (Lausearvutuse süntaks.)

1. Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem.
2. Kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem.
3. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \supset \mathcal{G})$, $(\mathcal{F} \sim \mathcal{G})$ on lausearvutuse valemid.
4. Rohkem lausearvutuse valemeid ei ole.

Valemit kujul $\neg\mathcal{F}$ nimetatakse valemi $\mathcal{F}$ *eituseks*. Valemit kujul $\mathcal{F}\,\&\,\mathcal{G}$ nimetatakse valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ *konjunktsiooniks*, valemit kujul $\mathcal{F}\vee\mathcal{G}$ *disjunktsiooniks*, valemit kujul $\mathcal{F}\supset\mathcal{G}$ *implikatsiooniks* ning valemit kujul $\mathcal{F}\sim\mathcal{G}$ valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ *ekvivalentsiks*.

Näiteks lausemuutujatest A, B, C, D saab definitsioonis 1 toodud induktiivset protsessi järgides koostada lausearvutuse valemi

$$(((A\vee B)\,\&\,\neg(A\supset C))\sim(\neg D\supset A))$$

Esitatud definitsioon ei ütle midagi valemite „sisu“ või „tähenduse“ kohta. Käesoleval hetkel on valemid lihtsalt sümbolite järjendid, süntaktilised objektid, mis on koostatud etteantud reegleid arvestades algmaterjalist – lausemuutujatest, tehtemärkidest ja sulgudest. See, millist „sisu“ valemid kannavad, tuleb fikseerida eraldi.

Lause tõele vastavuse määra nimetatakse lause *tõeväärtuseks*. Edaspidises tähistame tõeväärtust „tõene“ tähega t ning tõeväärtust „väär“ tähega v. *Väärtustuseks* nimetatakse lausemuutujatele omistatud tõeväärtuste komplekti. Kui on teada valemis kõigi lausemuutujate tõeväärtused, siis saame arvutada kogu valemi tõeväärtuse.

Definitsioon 2. (Lausearvutuse semantika.)

1. Valem $\neg\mathcal{F}$ on tõene parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}$ on väär.
2. Valem $(\mathcal{F}\,\&\,\mathcal{G})$ on tõene parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}$ on tõene ja valem $\mathcal{G}$ on tõene.
3. Valem $(\mathcal{F}\vee\mathcal{G})$ on tõene parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}$ on tõene või valem $\mathcal{G}$ on tõene.
4. Valem $(\mathcal{F}\supset\mathcal{G})$ on tõene parajasti siis, kui valem $\mathcal{G}$ on tõene või valem $\mathcal{F}$ on väär.
5. Valem $(\mathcal{F}\sim\mathcal{G})$ on tõene parajasti siis, kui valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on mõlemad tõesed või kui nad on mõlemad väärad.

Arvutame definitsiooni 2 abil näiteks valemi

$$(((A\vee B)\,\&\,\neg(A\supset C))\sim(\neg D\supset A))$$

tõeväärtuse väärtustusel $A=v$, $B=t$, $C=v$, $D=t$. Punkti 1 põhjal $\neg D=v$, punkti 4 põhjal $(\neg D\supset A)=v$, punkti 3 põhjal $(A\vee B)=t$ ja punkti 4 põhjal $(A\supset C)=t$. Edasi, punkti 1 põhjal $\neg(A\supset C)=v$, punkti 2 põhjal $((A\vee B)\,\&\,\neg(A\supset C))=v$ ja lõpuks punkti 5 põhjal $(((A\vee B)\,\&\,\neg(A\supset C))\sim(\neg D\supset A))=v$. Kogu valem antud väärtustusel on järelikult väär.

Tehe & formaliseerib eestikeelset sidesõna „ja“. Näiteks kui

$A=$ „Tallinn on Eesti pealinn“

$B=$ „Kuldnokk on rändlind“

siis lause $A \,\&\, B$ on tõene, sest mõlemad komponentlaused on tõesed.

Tehtele $\vee$ vastab eesti keeles sidesõna „või“. Kui näiteks

$$
\begin{aligned}
A &= \text{„Tartu on Eesti pealinn“}\\
B &= \text{„Kuldnokk on rändlind“}
\end{aligned}
$$

siis lause $A \vee B$ on tõene, sest vähemalt üks komponentlause on tõene.

Tehe $\supset$ on mõeldud formaliseerima loogilist järeldumist stiilis „kui ..., siis ...“. Näiteks lausete

$$
\begin{aligned}
A &= \text{„Arv } x \text{ on positiivne“}\\
B &= \text{„Arvu } x \text{ ruut on positiivne“}
\end{aligned}
$$

korral on lause $A \supset B$ tõene, kui $x = 4$. Tuleb aga tähele panna, et lause $A \supset B$ loetakse tõeseks ka siis, kui lause A on väär. Meil pole mingit põhjust lugeda järeldust „kui arv x on positiivne, siis arvu x ruut on positiivne“ vääraks juhtudel, kui vaadeldav arv on negatiivne või null.

Tehte $\sim$ grammatiliseks vasteks on seos „parajasti siis“. Näiteks kui

$$
\begin{aligned}
A &= \text{„Arv } x \text{ on positiivne“}\\
B &= \text{„Arvu } x \text{ kuup on positiivne“}
\end{aligned}
$$

siis lause $A \sim B$ on tõene igal x väärtusel.

Valemite kirjapanemise lihtsustamiseks lepitakse kokku tehete järjekord: kõrgema prioriteediga tehted tuleb teha enne, madalama prioriteediga tehted pärast. Tehete järjekord prioriteedi kahanemise järjekorras on

$$\neg \quad \& \quad \vee \quad \supset \quad \sim$$

Niiviisi saab valemites loobuda liigsetest sulgudest. Näiteks valem

$$(((A \vee B) \,\&\, \neg(A \supset C)) \sim (\neg D \supset A))$$

on sama mis valem

$$(A \vee B) \,\&\, \neg(A \supset C) \sim \neg D \supset A$$

Edaspidi jäämegi lihtsama kuju juurde.

Kui lausearvutuse valemi muutujate arv on n, siis on nende väärtustamiseks kokku 2^n erinevat võimalust, sest iga muutuja võib omandada teistest sõltumatult kas väärtuse t või väärtuse v. Tihtipeale tuleb meil leida valemi tõeväärtus kõigil väärtustustel. Otstarbekas on arvutused erinevatel väärtustustel koondada *tõeväärtustabelisse*. Ülaltoodud nelja muutujaga valemi tõeväärtustabel näeb välja selline:

A	B	C	D	$(A \vee B)$	$\&$	$\neg$	$(A \supset C)$	$\sim$	$\neg D$	$\supset A$
t	t	t	t	t	v	v	t	v	v	t
t	t	t	v	t	v	v	t	v	t	t
t	t	v	t	t	t	t	v	t	v	t
t	t	v	v	t	t	t	v	t	t	t
t	v	t	t	v	v	v	t	v	v	t
t	v	t	v	v	v	v	t	v	t	t
t	v	v	t	v	v	t	v	v	v	t
t	v	v	v	v	v	t	v	v	t	t
v	t	t	t	v	v	v	t	v	v	t
v	t	t	v	v	v	v	t	t	t	v
v	t	v	t	v	v	v	t	v	v	t
v	t	v	v	v	v	v	t	t	t	v
v	v	t	t	v	v	v	t	v	v	t
v	v	t	v	v	v	v	t	t	t	v
v	v	v	t	v	v	v	t	v	v	t
v	v	v	v	v	v	v	t	t	t	v

1.2. Spetsiaalsed valemiklassid

Kõigi valemite hulgast pakuvad meile huvi need, millel on teatavad iseloomulikud omadused. Lausearvutuse valemite puhul on need omadused seotud valemi tõesuse või väärusega erinevatel väärtustustel.

Definitsioon 3. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on tõene vähemalt ühel väärtustusel.

Definitsioon 4. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt tõeseks, kui ta on tõene igal väärtustusel.

Definitsioon 5. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on väär igal väärtustusel.

Samaselt tõesed valemid väljendavad seega üldkehtivaid loogikaseadusi, sest nende tõeväärtus on alati tõene ja ei sõltu üldse lausemuutujate tõeväärtustest. Asendades samaselt tõeses valemis lausemuutujad mingite konkreetsete lausetega ja tehtemärgid vastavate grammatiliste seostega, saame lause, mis on igal juhul tõene. Selles suhtes kujutavad samaselt tõesed valemid nö. skeeme üldkehtivate väidete konstrueerimiseks.

Seda, kas mingi valem on kehtestatav, samaselt tõene või samaselt väär, saab kindlaks teha tõeväärtustabeli abil. Kehtestatava valemi puhul peab tabelis leiduma rida, milles valemi tõeväärtuseks on t. Samaselt tõese valemi puhul peab valemi tõeväärtus olema t tabeli kõikides ridades. Samaselt väära valemi tabeli kõikides ridades on tõeväärtus v.

Vaatleme näiteks valemit

$$\neg A \supset (A \supset B)$$

Selle valemi tõeväärtustabel on

A	B	$\neg A$	$\supset$	$(A \supset B)$
t	t	v	t	t
t	v	v	t	v
v	t	t	t	t
v	v	t	t	t

Kuna valemi tõeväärtus igal väärtustusel on t, siis on see valem samaselt tõene. Toodud valem väljendab sisuliselt üht osa implikatsiooni tõeväärtuse definitsioonist: kui lause A on väär, siis implikatsioon $A \supset B$ on tõene sõltumata sellest, kas B on tõene või väär.

Sissetoodud kolme valemiklassi seovad järgmised omadused.

Omadus 1. Valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui valem $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär.

Tõestus. Oletame, et valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene. Valime suvalise väärtustuse α. Kuna valem $\mathcal{F}$ on vastavalt definitsioonile tõene igal väärtustusel, siis on ta tõene ka väärtustusel α. Siis aga valem $\neg\mathcal{F}$ on väärtustusel α väär. Kuna väärtustus α oli suvaline, siis võime seda arutlust korrata ka kõigi teiste väärtustuste j4uhul. Järelikult valem $\neg\mathcal{F}$ on väär igal väärtustusel ehk definitsiooni põhjal samaselt väär.

Vastupidi, oletame, et valem $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär. Valides suvaliselt väärtustuse α, näeme analoogiliselt eelnevaga, et valem $\mathcal{F}$ on sellel väärtustusel tõene. Kuna väärtustus α oli suvaline, siis on valem $\mathcal{F}$ tõene igal väärtustusel ehk samaselt tõene. □

Omadus 2. Valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav parajasti siis, kui valem $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene.

Tõestus. Oletame, et valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav. Definitsiooni põhjal tähendab see seda, et leidub väärtustus α, mille korral valem $\mathcal{F}$ on tõene. Sellel väärtustusel on aga valem $\neg\mathcal{F}$ väär, mistõttu ta ei saa olla samaselt tõene.

Vastupidi, oletame, et valem $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene. Siis peab leiduma väärtustus α, mille korral valem $\neg\mathcal{F}$ on väär. Sellel väärtustusel on aga valem $\mathcal{F}$ tõene. Definitsiooni põhjal on siis valem $\mathcal{F}$ kehtestatav. □

Üleminekut valemilt $\mathcal{F}$ valemile $\neg\mathcal{F}$ võib visualiseerida järgmise diagrammiga.

samaselt väärad valemid	kehtestatavad, kuid mitte samaselt tõesed valemid	samaselt tõesed valemid

Eituse rakendamine tähendab peegeldamist vertikaalse sirge suhtes. Samaselt tõene valem teiseneb samaselt vääraks valemiks; kehtestatav, kuid mitte samaselt tõene valem teiseneb jälle sedasama tüüpi valemiks.

1.3. Samaväärsed valemid

Vaatleme valemeid $A \sim B$ ja $B \sim A$. Kuigi nende kahe valemi kirjapilt on erinev, tähendavad nad sisuliselt ühte ja sedasama. Valemite semantilise ühtelangevuse väljendamiseks toome sisse järgmise mõiste.

Definitsioon 6. Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse samaväärseteks, kui nende tõeväärtused langevad kokku kõigi neis valemites esinevate muutujate igal väärtustusel.

Veendume näiteks, et valemid $(\neg A \,\&\, \neg B \supset C) \,\&(C \supset A \vee B)$ ja $(A \vee B)$ on samaväärsed. Selleks koostame tõeväärtustabeli

A	B	C	$(\neg A$	$\&$	$\neg B$	$\supset C)$	$\&(C$	$\supset$	$A \vee B)$	$A \vee B$
t	t	t	v	v	v	t	t	t	t	t
t	t	v	v	v	v	t	t	t	t	t
t	v	t	v	v	t	t	t	t	t	t
t	v	v	v	v	t	t	t	t	t	t
v	t	t	t	v	v	t	t	t	t	t
v	t	v	t	v	v	t	t	t	t	t
v	v	t	t	t	t	t	v	v	v	v
v	v	v	t	t	t	v	v	t	v	v

Kuna mõlema valemi väärtuste veerud on võrdsed, siis langevad nende valemite tõeväärtused igal väärtustusel kokku. Näeme, et samaväärsed võivad olla ka valemid, mis ei koosne samadest muutujatest.

Asjaolu, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed, märgitakse tähisega $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$. Sümbol $\equiv$ tähistab siin seost kahe valemi vahel, ta ei ole uus lausearvutuse tehtemärk.

Formuleerime nüüd rea lausearvutuse põhisamaväärsusi, mida kõige sagedamini vaja läheb.

1. Idempotentsuse seadused

$$\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$$

2. Kommutatiivsuse seadused

$$\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{F}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$$

3. Assotsiatiivsuse seadused

$$(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}) \,\&\, \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \,\&(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H})$$
$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$$

4. Distributiivsuse seadused

$$\mathcal{F} \,\&(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{H}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \,\&(\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$$

5. Neelamisseadused

$$\mathcal{F} \,\&(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$$

6. De Morgani seadused

$$\neg(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$$
$$\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \,\&\, \neg\mathcal{G}$$

7. Kahekordse eituse seadus

$$\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$$

8. Samaselt tõese valemi väljajätureeglid

$$\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G} \equiv \mathcal{G}, \text{ kui } \mathcal{F} \text{ on samaselt tõene}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}, \text{ kui } \mathcal{F} \text{ on samaselt tõene}$$

9. Samaselt väära valemi väljajätureeglid

$$\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}, \text{ kui } \mathcal{F} \text{ on samaselt väär}$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G}, \text{ kui } \mathcal{F} \text{ on samaselt väär}$$

10. Implikatsiooni avaldis konjuktsiooni ja disjunktsiooni kaudu

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \mathbin{\&} \neg\mathcal{G})$$
$$\mathcal{F} \supset \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$$

11. Konjuktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu

$$\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \supset \neg\mathcal{G})$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$$

12. Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \mathbin{\&} \neg\mathcal{G}$$
$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \supset \mathcal{G}) \mathbin{\&} (\neg\mathcal{F} \supset \neg\mathcal{G})$$

Kõiki neid samaväärsusi saab tõestada tõeväärtustabeli abil samuti, nagu me tegime eelnevas näites. Samaväärsusi kasutatakse valemite teisendamisel, et viia etteantud valem mingile sobivale kujule.

Assotsiatiivsuse seadustest järeldub muuhulgas, et enam kui kahe liikme konjunktsioonis või disjunktsioonis võib sulge vabalt ümber paigutada. Näiteks valemid $(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} (C \mathbin{\&} D)$ ja $((A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C) \mathbin{\&} D$ on samaväärsed. Edaspidi jätame niisuguses olukorras sulud üldse ära, toodud valemite asemel kirjutame lihtsalt $A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C \mathbin{\&} D$.

Teoreem 1. (Substitutsiooniteoreem.) Olgu $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ samaväärsed valemid ning $\mathcal{H}$ valem, mis sisaldab valemit $\mathcal{F}$ osavalemina. Kui valemis $\mathcal{H}$ asendada osavalemi $\mathcal{F}$ üks esinemine valemiga $\mathcal{G}$, siis tekkinud valem $\mathcal{H}'$ on samaväärne valemiga $\mathcal{H}$.

Tõestus. Teoreemi tõestame induktsiooniga valemi struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui $\mathcal{H}$ on lausemuutuja, milles valem $\mathcal{F}$ esineb osavalemina, siis $\mathcal{H} = \mathcal{F}$. Järelikult $\mathcal{H}' = \mathcal{G}$. Näeme, et valemid $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{H}'$ on samaväärsed.

Induktsiooni samm. Oletame, et $\mathcal{H}$ ei ole lausemuutuja. Juhul, kui osavalem $\mathcal{F}$ langeb ühte valemiga $\mathcal{H}$, siis veendume samuti nagu induktsiooni baasis, et valemid $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{H}'$ on samaväärsed. Oletame nüüd, et osavalem $\mathcal{F}$ erineb valemist $\mathcal{H}$.

Juht 1. Olgu valem $\mathcal{H}$ kujul $\neg\mathcal{H}_1$. Siis on valem $\mathcal{F}$ valemi $\mathcal{H}_1$ osavalemiks. Induktsiooni eelduse põhjal on valem $\mathcal{H}_1$ samaväärne valemiga $\mathcal{H}_1'$, kus osavalem $\mathcal{F}$ on asendatud valemiga $\mathcal{G}$. Järelikult $\mathcal{H}'$ on kujul $\neg\mathcal{H}_1'$. Kuna valemid $\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}_1'$ on samaväärsed, siis on samaväärsed ka nende eitused ehk valemid $\mathcal{H} = \neg\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}' = \neg\mathcal{H}_1'$.

Juht 2. Olgu valem $\mathcal{H}$ on kujul $\mathcal{H}_1 \,\&\, \mathcal{H}_2$. Osavalem $\mathcal{F}$ esineb siis kas valemis $\mathcal{H}_1$ või valemis $\mathcal{H}_2$. Eeldame, et ta esineb valemis $\mathcal{H}_1$ (teine juht on analoogiline). Induktsiooni eelduse põhjal on valem $\mathcal{H}_1$ samaväärne valemiga $\mathcal{H}_1'$, milles osavalem $\mathcal{F}$ on asendatud valemiga $\mathcal{G}$. Järelikult $\mathcal{H}'$ on kujul $\mathcal{H}_1' \,\&\, \mathcal{H}_2$. Kuna valemid $\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}_1'$ on samaväärsed, siis on samaväärsed ka nende konjunktsioonid valemiga $\mathcal{H}_2$ ehk siis valemid $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \,\&\, \mathcal{H}_2$ ja $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1' \,\&\, \mathcal{H}_2$.

Juht 3. Kui valem $\mathcal{H}$ on kujul $\mathcal{H}_1 \vee \mathcal{H}_2$, kujul $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$ või kujul $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$, siis on tõestus analoogiline. □

Substitutsiooniteoreemi põhjal võib valemite teisendamisel asendada osavalemeid samaväärsete valemitega, tulemusena saadud valem jääb esialgse valemiga samaväärseks. Tõestame põhisamaväärsustele tuginedes, et valem $(A \vee (B \vee C)) \,\&(C \vee \neg A)$ on samaväärne valemiga $\neg A \,\&\, B \vee C$.

$$
\begin{aligned}
&(A \vee (B \vee C)) \,\&(C \vee \neg A) && \\
&\qquad \equiv ((A \vee B) \vee C)) \,\&(C \vee \neg A) && \text{(assotsiatiivsus)}\\
&\qquad \equiv (C \vee (A \vee B)) \,\&(C \vee \neg A) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&\qquad \equiv C \vee (A \vee B) \,\&\, \neg A && \text{(distributiivsus)}\\
&\qquad \equiv C \vee \neg A \,\&(A \vee B) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&\qquad \equiv C \vee (\neg A \,\&\, A \vee \neg A \,\&\, B) && \text{(distributiivsus)}\\
&\qquad \equiv C \vee \neg A \,\&\, B && \text{(samaselt väär valem)}\\
&\qquad \equiv \neg A \,\&\, B \vee C && \text{(kommutatiivsus)}
\end{aligned}
$$

1.4. Normaalkujud

Lausemuutujat või tema eitust nimetame *literaaliks.* Näiteks A, B, C, D, $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$, $\neg D$ on literaalid.

Elementaarkonjunktsioon on valem kujul

$$L_1 \,\&\, L_2 \,\&\, \ldots \,\&\, L_n,$$

kus L_1, L_2, ..., L_n on literaalid, mille hulgas iga lausemuutuja esineb ülimalt üks kord. Analoogiliselt, *elementaardisjunktsioon* on valem kujul

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n,$$

kus L_1, L_2, …, L_n on literaalid, mille hulgas iga lausemuutuja esineb ülimalt üks kord.

Täielik elementaarkonjunktsioon on valem kujul

$$L_1 \,\&\, L_2 \,\&\, \ldots \,\&\, L_n,$$

kus L_1, L_2, …, L_n on literaalid, mille hulgas iga lausemuutuja esineb täpselt üks kord. Analoogiliselt, *täielik elementaardisjunktsioon* on valem kujul

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n,$$

kus L_1, L_2, …, L_n on literaalid, mille hulgas iga lausemuutuja esineb täpselt üks kord.

Määratlustes mainitud lausemuutujad eeldame kuuluvat mingisse fikseeritud hulka, milleks tavaliselt on valemi kõigi muutujate hulk. Näiteks muutujatest A, B, C, D võib moodustada järgmised elementaarkonjunktsioonid

$$A \,\&\, B \,\&\, C, \quad \neg B \,\&\, C \,\&\, D, \quad C \,\&\, \neg A$$

ning järgmised täielikud elementaarkonjunktsioonid

$$A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D, \quad A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \,\&\, D, \quad \neg A \,\&\, B \,\&\, \neg C \,\&\, \neg D.$$

Elementaarkonjunktsiooni (elementaardisjunktsiooni) mõiste hõlmab endas täieliku elementaarkonjunktsiooni (täieliku elementaardisjunktsiooni) mõiste.

Definitsioon 7. Ütleme, et valem $\mathcal{F}$ on disjunktiivsel normaalkujul, kui ta on esitatud elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonina, st. kujul

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{F}_m,$$

kus $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_m$ on mittesamaväärsed elementaarkonjunktsioonid. Analoogiliselt, valem $\mathcal{F}$ on konjunktiivsel normaalkujul, kui ta on esitatud elementaardisjunktsioonide konjunktsioonina, st. kujul

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_m,$$

kus $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_m$ on mittesamaväärsed elementaardisjunktsioonid.

Definitsioon 8. Ütleme, et valem $\mathcal{F}$ on täielikul disjunktiivsel normaalkujul, kui ta on esitatud täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonina, st. kujul

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{F}_m,$$

kus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m$ on mittesamaväärsed täielikud elementaarkonjunktsioonid. Analoogiliselt, valem $\mathcal{F}$ on täielikul konjunktiivsel normaalkujul, kui ta on esitatud täielike elementaardisjunktsioonide konjunktsioonina, st. kujul

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{F}_m,$$

kus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m$ on mittesamaväärsed täielikud elementaardisjunktsioonid.

Näiteks üks valemi $A \supset B$ disjunktiivsetest normaalkujudest on

$$\neg A \vee A \,\&\, \neg B,$$

sama valemi täielik disjunktiivne normaalkuju aga

$$A \,\&\, B \vee \neg A \,\&\, B \vee \neg A \,\&\, \neg B.$$

Valemi $\neg(B \supset A)$ üks konjunktiivsetest normaalkujudest on

$$B \,\&(\neg A \vee \neg B),$$

sama valemi täielik konjunktiivne normaalkuju aga

$$(\neg A \vee \neg B) \,\&(\neg A \vee B) \,\&(A \vee B).$$

Järgmine teoreem näitab, et peale triviaalsete erijuhtude saab iga valemi teisendada täielikule disjunktiivsele ja täielikule konjunktiivsele normaalkujule.

Teoreem 2. Kui valem $\mathcal{F}$ ei ole samaselt väär, siis leidub temaga samaväärne valem täielikul disjunktiivsel normaalkujul. Kui valem $\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene, siis leidub temaga samaväärne valem täielikul konjunktiivsel normaalkujul.

Tõestus. a) Oletame, et valem $\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene ega samaselt väär. Tõestame teoreemi induktsiooniga valemi struktuuri järgi.

Induktsiooni baas. Kui $\mathcal{F}$ on lausemuutuja, siis ta juba on täielikul disjunktiivsel normaalkujul ja täielikul konjunktiivsel normaalkujul.

Induktsiooni samm. Vaatleme eraldi juhte valemi ehituse järgi.

Juht 1. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\neg\mathcal{F}_1$. Induktsiooni eelduse põhjal leiduvad valemiga $\mathcal{F}_1$ samaväärsed valemid $\mathcal{F}_1'$ täielikul disjunktiivsel normaalkujul ja $\mathcal{F}_1''$ täielikul konjunktiivsel normaalkujul. Olgu valem $\mathcal{F}_1'$ avaldatud literaalide kaudu kujul

$$\mathcal{F}_1' = L_{11} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{1n} \vee \ldots \vee L_{m1} \,\&\, \ldots \,\&\, L_{mn}.$$

Leides mõlemast poolest eituse, saame algse valemiga $\mathcal{F}$ samaväärse valemi. De Morgani seaduste ja kahekordse eituse seaduse põhjal

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv \neg(L_{11} \,\&\, \dots \,\&\, L_{1n} \vee \dots \vee L_{m1} \,\&\, \dots \,\&\, L_{mn}) \\ &\equiv \neg(L_{11} \,\&\, \dots \,\&\, L_{1n}) \,\&\, \dots \,\&\, \neg(L_{m1} \,\&\, \dots \,\&\, L_{mn}) \\ &\equiv (\neg L_{11} \vee \dots \vee \neg L_{1n}) \,\&\, \dots \,\&(\neg L_{m1} \vee \dots \vee \neg L_{mn}) \\ &\equiv (\overline{L_{11}} \vee \dots \vee \overline{L_{1n}}) \,\&\, \dots \,\&(\overline{L_{m1}} \vee \dots \vee \overline{L_{mn}})\end{aligned}$$

kus

$$\overline{L_{ij}} = \begin{cases} A, B, C, \dots, & \text{kui } L_{ij} = \neg A, \neg B, \neg C, \dots \\ \neg A, \neg B, \neg C, \dots, & \text{kui } L_{ij} = A, B, C, \dots \end{cases}$$

Niimoodi saime valemiga $\mathcal{F}$ samaväärse valemi täielikul konjunktiivsel normaalkujul. Täpselt samamoodi tuletatakse valemist $\mathcal{F}_1''$ lähtudes valemiga $\mathcal{F}$ samaväärne valem täielikul disjunktiivsel normaalkujul.

Juht 2. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2$. Induktsiooni eelduse põhjal leiduvad valemiga $\mathcal{F}_1$ samaväärne valem $\mathcal{F}_1'$ ja valemiga $\mathcal{F}_2$ samaväärne valem $\mathcal{F}_2'$, mis mõlemad on täielikul disjunktiivsel normaalkujul. Olgu valemid $\mathcal{F}_1'$ ja $\mathcal{F}_2'$ esitatud täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonina

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1' &= \mathcal{F}_{11}' \vee \dots \vee \mathcal{F}_{1m_1}' \\ \mathcal{F}_2' &= \mathcal{F}_{21}' \vee \dots \vee \mathcal{F}_{2m_2}'\end{aligned}$$

Siis valem $\mathcal{F}_1' \,\&\, \mathcal{F}_2'$ on samaväärne valemiga $\mathcal{F}$ ja distributiivsuse seaduse põhjal

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv (\mathcal{F}_{11}' \vee \dots \vee \mathcal{F}_{1m_1}') \,\&(\mathcal{F}_{21}' \vee \dots \vee \mathcal{F}_{2m_2}') \\ &\equiv (\mathcal{F}_{11}' \,\&\, \mathcal{F}_{21}') \vee \dots \vee(\mathcal{F}_{11}' \,\&\, \mathcal{F}_{2m_2}') \vee \dots \vee \\ &\quad (\mathcal{F}_{1m_1}' \,\&\, \mathcal{F}_{21}') \vee \dots \vee(\mathcal{F}_{1m_1}' \,\&\, \mathcal{F}_{2m_2}')\end{aligned}$$

Sulgudes olevad liikmed kujutavad endast literaalide konjunktsioone. Sealhulgas on igas sulus esindatud kõik valemi $\mathcal{F}$ muutujad, sest liikmed $\mathcal{F}_{1j}'$ on täielikud elementaarkonjunktsioonid valemi $\mathcal{F}_1'$ muutujatest ja liikmed $\mathcal{F}_{2j}'$ on täielikud elementaarkonjunktsioonid valemi $\mathcal{F}_2'$ muutujatest. Valemi $\mathcal{F}$ täieliku disjunktiivse normaalkuju saamiseks tuleb igas sulus kaotada kahekordselt esinevad literaalid (idempotentsuse seadus), jätta disjunktsioonist ära samaselt väärad elementaarkonjunktsioonid (samaselt väära valemi väljajätureegel) ja allesjäänud elementaarkonjunktsioonidest jätta alles igaühest ainult üks eksemplar. Niisuguste operatsioonide teel jõuame lõpuks valemi $\mathcal{F}$ täieliku disjunktiivse normaakujuni.

Et saada valemi $\mathcal{F}$ täielik konjunktiivne normaalkuju, lähtume valemitega $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ samaväärsetest täielikul konjunktiivsel normaalkujul olevatest valemitest $\mathcal{F}_1''$ ja $\mathcal{F}_2''$. Olgu need esitatud täielike elementaardisjunktsioonide konjunktsioonidena

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1'' &= \mathcal{F}_{11}'' \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_{1m_1}'' \\ \mathcal{F}_2'' &= \mathcal{F}_{21}'' \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_{2m_2}''\end{aligned}$$

Siis valem $\mathcal{F}_1'' \,\&\, \mathcal{F}_2''$ on samaväärne valemiga $\mathcal{F}$ ehk

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{11}'' \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_{1m_1}'' \,\&\, \mathcal{F}_{21}'' \,\&\ldots\&\, \mathcal{F}_{2m_2}''$$

Selle valemi teisendamiseks täielikule disjunktiivsele normaalkujule tuleb teha veel järgmised operatsioonid. Iga liikme $\mathcal{F}_{ij}$, kus kogu valemi $\mathcal{F}$ muutujate loendist puudub mingi muutuja, näiteks A, asendame kahe liikme konjunktsiooniga $(\mathcal{F}_{ij} \vee A) \,\&(\mathcal{F}_{ij} \vee \neg A)$. Need kaks liiget on kokkuvõttes samaväärsed esialgse ühe liikmega, nagu see nähtub distributiivsusest ja samaselt väära liikme väljajätureeglist. Niisugust protsessi kordame senikaua, kuni kõigis liikmetes on täiskomplekt muutujaid, st. kõik liikmed on täielikud elementaardisjunktsioonid. Seejärel jätame korduvad elementaardisjunktsioonid konjunktsioonist välja.

Juht 3. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$. Kahekordse eituse ja De Morgani seaduse abil teisendame selle valemi kujule $\neg(\neg\mathcal{F}_1 \,\&\, \neg\mathcal{F}_2)$ ning rakendame juhte 1 ja 2.

Juht 4. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. Teisendame valemi kujule $\neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ning rakendame juhte 1 ja 3.

Juht 5. Olgu valem $\mathcal{F}$ kujul $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$. Teisendame valemi kujule $\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2 \vee \neg\mathcal{F}_1 \,\&\, \neg\mathcal{F}_2$ ning rakendame juhte 1, 2 ja 3.

b) Kui $\mathcal{F}$ on samaselt tõene, siis olgu $A_1, \ldots, A_n$ kõik lausemuutujad, mis selles valemis esinevad. Valemi $\mathcal{F}$ täielik disjunktiivne normaalkuju on sel juhul

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \equiv\ & A_1 \,\&\ldots\&\, A_n \,\vee \\ & A_1 \,\&\ldots\&\, \neg A_n \,\vee \\ & \ldots \\ & \neg A_1 \,\&\ldots\&\, A_n \,\vee \\ & \neg A_1 \,\&\ldots\&\, \neg A_n\end{aligned}$$

Kui aga $\mathcal{F}$ on samaselt tõene, siis tema täielik disjunktiivne normaalkuju on

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \equiv\ & (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \,\& \\ & (A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n) \,\&\end{aligned}$$

$$\ldots$$
$$(\neg A_1 \vee \ldots \vee A_n)\,\&$$
$$(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$$

$\square$

Toodud tõestuses on ilmutamata kujul kirjas algoritm, kuidas valemit teisendada disjunktiivsele ja konjunktiivsele normaalkujule. Formuleerime selle algoritmi nüüd selgemalt. Valemi teisendamisel tuleb jälgida, et sulgude ärajätmisega seoses samaväärsus rikutud ei saaks.

Olgu antud valem $\mathcal{F}$. Vaja on leida tema disjunktiivne (konjunktiivne) normaalkuju.

1. Elimineerida implikatsioonid ja ekvivalentsid:

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H} \equiv \neg\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$$
$$\mathcal{G} \sim \mathcal{H} \equiv \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \vee \neg\mathcal{G} \,\&\, \neg\mathcal{H}$$

2. Asendada

$$\neg\neg\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$$
$$\neg(\mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}) \Rightarrow \neg\mathcal{G} \vee \neg\mathcal{H}$$
$$\neg(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \Rightarrow \neg\mathcal{G} \,\&\, \neg\mathcal{H}$$

kuni selliseid osavalemeid enam ei leidu.

3. Asendada

DNK leidmisel	KNK leidmisel
$\mathcal{F} \,\&(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{H}$	$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H} \Rightarrow (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \,\&(\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$
$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \,\&\, \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{H} \vee \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}$	$\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \vee \mathcal{H} \Rightarrow (\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \,\&(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$

4. Korrastada liikmed:
   a) jätta ära samaselt väärad (samaselt tõesed) elementaarkonjunktsioonid (-disjunktsioonid);
   b) igas elementaarkonjunktsioonis (-disjunktsioonis) jätta ära korduvad literaalid;
   c) jätta ära korduvad elementaarkonjunktsioonid (-disjunktsioonid)
5. Kui eesmärgiks on leida täielik disjunktiivne (konjunktiivne) normaalkuju, siis lisada igasse elementaarkonjunktsiooni (-disjunktsiooni) iga puuduva muutuja A kohta liige $A \vee \neg A$ (liige $A \,\&\, \neg A$) ning korrata samme 3 ja 4.

Leiame näiteks valemi $\neg B \sim A \supset \neg C \,\&\, \neg B$ täieliku disjunktiivse ja täieliku konjunktiivse normaalkuju.

Täielik disjunktiivne normaalkuju:

$$
\begin{aligned}
\neg B \sim A \supset \neg C \,\&\, \neg B &\equiv \neg B \,\&(A \supset \neg C \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg B \,\&\, \neg(A \supset \neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg B \,\&\, \neg(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, \neg\neg A \,\&\, \neg(\neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, A \,\&(\neg\neg C \vee \neg\neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, A \,\&(C \vee B) \\
&\equiv \neg B \,\&\, \neg A \vee \neg B \,\&\, \neg C \,\&\, \neg B \vee B \,\&\, A \,\&\, C \vee B \,\&\, A \,\&\, B \\
&\equiv \neg A \,\&\, \neg B \vee \neg B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \\
&\equiv \neg A \,\&\, \neg B \,\&(C \vee \neg C) \vee(A \vee \neg A) \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee \\
&\quad\; A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&(C \vee \neg C) \\
&\equiv \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee \\
&\quad\; \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \neg C \\
&\equiv \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee \\
&\quad\; A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \neg C
\end{aligned}
$$

Täielik konjunktiivne normaalkuju:

$$
\begin{aligned}
\neg B \sim A \supset \neg C \,\&\, \neg B &\equiv \neg B \,\&(A \supset \neg C \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg B \,\&\, \neg(A \supset \neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg B \,\&\, \neg(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, \neg\neg A \,\&\, \neg(\neg C \,\&\, \neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, A \,\&(\neg\neg C \vee \neg\neg B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C \,\&\, \neg B) \vee B \,\&\, A \,\&(C \vee B) \\
&\equiv \neg B \,\&(\neg A \vee \neg C) \,\&(\neg A \vee \neg B) \vee B \,\&\, A \,\&(C \vee B) \\
&\equiv (\neg B \vee B) \,\&(\neg B \vee A) \,\&(\neg B \vee C \vee B) \,\& \\
&\quad\; (\neg A \vee \neg C \vee B) \,\&(\neg A \vee \neg C \vee A) \,\&(\neg A \vee \neg C \vee C \vee B) \,\& \\
&\quad\; (\neg A \vee \neg B \vee B) \,\&(\neg A \vee \neg B \vee A) \,\&(\neg A \vee \neg B \vee C \vee B) \\
&\equiv (A \vee \neg B) \,\&(\neg A \vee B \vee \neg C) \\
&\equiv (A \vee \neg B \vee C \,\&\, \neg C) \,\&(\neg A \vee B \vee \neg C) \\
&\equiv (A \vee \neg B \vee C) \,\&(A \vee \neg B \vee \neg C) \,\&(\neg A \vee B \vee \neg C)
\end{aligned}
$$

Valemi täielikku disjunktiivset ja täielikku konjunktiivset normaalkuju võib leida ka valemi tõeväärtustabelist. Et saada täielikku disjunktiivset normaalkuju, tuleb võtta tabeli need read, kus valemi tõeväärtus on t ja moodustada iga sellise rea kohta üks elementaarkonjunktsioon. Kui muutuja tõeväärtus sellele reale vastavas väärtustuses on t, siis lisatakse konjunktsiooni literaalina see muutuja, kui tõeväärtus on v siis lisatakse tema eitus. Täieliku konjunktiivse normaalkuju puhul tuleb omavahel vahetada tõeväärtuste t ja v ning disjunktsiooni ja konjunktsiooni rollid.

Näiteks valemi $\neg B \sim A \supset \neg C \,\&\, \neg B$ tõeväärtustabel on

A	B	C	$\neg B$	$\sim$	$A \supset$	$\neg C$	$\&$	$\neg B$
t	t	t	v	t	v	v	v	v
t	t	v	v	t	v	t	v	v
t	v	t	t	v	v	v	v	t
t	v	v	t	t	t	t	t	t
v	t	t	v	v	t	v	v	v
v	t	v	v	v	t	t	v	v
v	v	t	t	t	t	v	v	t
v	v	v	t	t	t	t	t	t

Siit leiame valemi $\mathcal{F}$ täieliku disjunktiivse normaalkuju

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \equiv\ & A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \vee \\ & \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C \vee \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C\end{aligned}$$

ning täieliku konjunktiivse normaalkuju

$$\mathcal{F} \equiv (\neg A \vee B \vee \neg C) \,\&(A \vee \neg B \vee \neg C) \,\&(A \vee \neg B \vee C)$$

Toodud kahest võttest normaalkujude leidmiseks ei saa kumbagi üheselt eelistada. Mõnikord koostatakse näiteks valemi tõeväärtustabel disjunktiivsest või konjunktiivsest normaalkujust lähtudes.