

Lausearvutus

Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse

Sügis 2008

- ▶ Lausearvutuse põhiliseks uurimisobjektiks on *laused*, mis võivad pärineda ükskõik millisest valdkonnast.
- ▶ Liitlauseid jaotatakse minimaalseteks iseseisvateks üksusteks – *lihtlauseteks* ja neid ühendavateks *grammatilisteks seosteks*.
- ▶ Tuuakse sisse sümbolid lihtlause ja seoste tähistamiseks ning kirjutatakse vaadeldav lause üles valemina. Edasise uurimise aluseks võetakse vastav valem.

Vaatleme lauset

Kui planeedil on atmosfäär ja seal ei leidu vett, siis planeedil ei ole elu.

Võtame kasutusele tähised lihtlausete märkimiseks:

A = *Planeedil on atmosfäär*
 B = *Planeedil leidub vett*
 C = *Planeedil on elu*

Veel olgu \neg eitus, $\&$ sidesõna „ja“ ning \rightarrow seos „kui... , siis...“.

Vaadeldava lause kirja võime kirja panna valemiga

$$(A \& \neg B) \rightarrow \neg C$$

Lausete puhul ei huvita meid nende konkreetne sisu, vaid nende vastavus tegelikkusele. Lause tõe vastavuse määra näitab lause *tõeväärtus*.

Kõik laused peavad rahuldama järgmisi tingimusi.

1. **Välistatud kolmanda seadus.** Iga lause on kas tõene või väär.
2. **Mittevasturääkivuse seadus.** Ükski lause pole korraga tõene ja väär.

Need tingimused vastavad *klassikalisele kahevalentsele loogikale*.

Kas on lausearvutuse laused?

1. *Täna on jälle tuuline ilm.*
2. *Maakera on lapik, ta seisab kolme elevandi seljas, need omakorda seisavad hiidkilpkonna seljas, kes ujub meres.*
3. *Kui lähed neljapäeva keskööl ristteele, vilistad kolm korda, pöörad ümber vasaku õla ja lööd kannaga vastu maad, siis ilmub Vanapoiss ja küsib, mida ta võib sinu heaks teha.*
4. *Kas antiikaja geograaf Pytheas külastas oma Ultima Thule reisi ajal Saaremaad, nagu väidetakse?*
5. *Milline mehine vastupanu vaenlasele, arvestades indiaanlaste sõjariistade arenematust ja taktikalist mahajäämist!*
6. *Oo, mu arm, mine tagasi sinna, kust tulid, ära sunni mind ööd ja päevad sinu peale mõtlema, sinu kirju peitma, pidama iga hääletut astet akna taga sinu sammuks!*
7. *Tuul, torm, äike, vihm, lumi, rahe, udu, hall, tuisk.*
8. *See lause on väär.*

- ▶ Eitus \neg . Väljendab lause mittekehtimist.
 - ▶ *Rahvaste sõprus ei tunne piire.*
 - ▶ *Pole õige, et taevas ja maa puutuvad silmapiiri taga.*
- ▶ Konjunktsioon $\&$. Tähendab seost „ja“.
 - ▶ *Lumi sulas ja jõgi tõusis üle kallaste.*
 - ▶ *Tulin, nägin, võitsin.*
 - ▶ *Puidutöötlemisfirma „Tamm ja Kadakas“ läks pankrotti ning ta müüdi kontsernile „Akaatsia ja Eukalüpt“.*
- ▶ Disjunktsioon \vee . Tähendab seost „või“ (mittevälistav).
 - ▶ *Puupakk on okslik või kirves on nüri.*
 - ▶ *Annika või Kerli on toas.*
- ▶ Implikatsioon \rightarrow . Tingimuslik konstruktsioon „kui . . . , siis“.
 - ▶ *Teoreemist P järgeldub teoreem Q.*
 - ▶ *Kui sina oled küülik, siis olen mina nahkhiir!*
- ▶ Ekvivalents \leftrightarrow . Väljendab seost „parajasti siis“.
 - ▶ *Hulk X on kinnine parajasti siis, kui X ühtib oma sulundiga.*

Koostades lihtsamatest lausetest keerulisemaid, eeldame järgmiste tingimuste kehtivust.

- ▶ Tehteid võib teostada ükskõik milliste lausetega.
- ▶ Tehte tulemuseks saadud lause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest.

Nendest tingimustest järeldub, et lausetega tehete sooritamisel on oluline ainult lause tõeväärtus, mitte lause sisu.

Suuri ladina tähti A , B , C jne nimetame *lausemuutujateks*.

Definitsioon

Lausearvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada alltoodud reeglite abil.

1. *Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem.*
2. *Kui F on lausearvutuse valem, siis ka $\neg F$ on lausearvutuse valem.*
3. *Kui F ja G on lausearvutuse valemid, siis ka $(F \& G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ ja $(F \leftrightarrow G)$ on lausearvutuse valemid.*

Kõiki antud valemi konstrueerimise käigus tekkinud valemeid nimetatakse selle valemi *osavalemiteks* ehk *alamvalemiteks*, konstrueerimise viimasel sammul kasutatud tehet aga valemi *peatehteks*.

Näiteks valemi $((A \& \neg B) \& (C \rightarrow \neg A)) \leftrightarrow (B \vee A)$ osavalemid on

$$\begin{array}{l} A, \quad B, \quad C, \quad \neg A, \quad \neg B, \\ (B \vee A), \quad (A \& \neg B), \quad (C \rightarrow \neg A), \\ ((A \& \neg B) \& (C \rightarrow \neg A)). \end{array}$$

Kokkulepped sulgude kohta

1. **Tehete prioriteet** kõrgemast madalamani on \neg , $\&$, \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .
2. **Vasakassotsiatiivsus**: kui mitme liikme konjunktsioonis või disjunktsioonis sooritatakse tehteid vasakult paremale, siis võib tehete järjekorda täpsustavatest sulgudest loobuda.
3. Valemi välimised sulud võib ära jätta.

Näiteks valemi

$$(((A \& \neg B) \& (C \rightarrow \neg A)) \leftrightarrow (B \vee A))$$

võime kirjutada ülevaatlikumal kujul

$$A \& \neg B \& (C \rightarrow \neg A) \leftrightarrow B \vee A$$

- ▶ Kui lausemuutuja A on tõene, siis kirjutame $A = 1$; kui lausemuutuja A on väär, siis kirjutame $A = 0$;
- ▶ Kui omistame korraga tõeväärtused mitmele lausemuutujale, siis seda tõeväärtuste komplekti nimetame *väärtustuseks*.
- ▶ Näiteks muutujate A , B , C üks võimalik väärtustus on $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ ehk $(1, 0, 1)$.

Definitsioon

Lausearvutuse valemi F tõeväärtus etteantud väärtustusel leitakse järgmiste reeglite abil.

1. Kui $F = \neg G$, siis $F = 1$ parajasti siis, kui $G = 0$.
2. Kui $F = G \& H$, siis $F = 1$ parajasti siis, kui $F = 1$ ja $G = 1$.
3. Kui $F = G \vee H$, siis $F = 1$ parajasti siis, kui $F = 1$ või $G = 1$.
4. Kui $F = G \rightarrow H$, siis $F = 1$ parajasti siis, kui $F = 0$ või $G = 1$.
5. Kui $F = G \leftrightarrow H$, siis $F = 1$ parajasti siis, kui $F = 1$ ja $G = 1$ või $F = 0$ ja $G = 0$.

- ▶ Eitus

F	$\neg F$
1	0
0	1

- ▶ Konjunktsioon, disjunktsioon, implikatsioon, ekvivalents

F	G	$F \& G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Näide

Arvutada valemi $A \& \neg B \& (C \rightarrow \neg A) \leftrightarrow B \vee A$ tõeväärtus muutujate väärtustusel $A = 1, B = 0, C = 1$.

Kõigepealt

$$\neg B = 1, \quad \neg A = 0 \quad \text{ja} \quad B \vee A = 1.$$

Edasi saame

$$A \& \neg B = 1 \quad \text{ja} \quad C \rightarrow \neg A = 0.$$

Seejärel

$$A \& \neg B \& (C \rightarrow \neg A) = 0$$

ning lõpuks

$$A \& \neg B \& (C \rightarrow \neg A) \leftrightarrow B \vee A = 0.$$

Valemi tõeväärtustabel

Tabeli vasakus pooles on muutujate kõik väärtustused. Paremas pooles on tehte tulemus kirjutatud vastava tehte veergu.

A	B	C	4	2	6	5	1	7	3
A	B	C	$A \& \neg B \& (C \rightarrow \neg A) \leftrightarrow B \vee A$						
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Kogu valemi tõeväärtused saame peatehete vastavast veerust.

Definitsioon

Lausearvutuse valemid F nimetatakse

- ▶ **samaselt tõeseks**, kui ta on igal väärtustusel tõene;
- ▶ **samaselt vääraks**, kui ta on igal väärtustusel väär.

Näiteks valem $A \vee \neg A$ on samaselt tõene (vastab välisstatud kolmanda seadusele). Valem $A \& \neg A$ on samaselt väär (vastab mittevasturääkivuse seadusele).

- ▶ Samaselt tõesed valemid väljendavad üldkehtivaid loogikaseadusi.
- ▶ Samaselt tõesed valemid ei sisalda informatsiooni.

Samaselt tõesuse ja vääruse kontrollimine

Samaselt tõe valemite tõe väärtuste veerg sisaldab ainult tõeid tõe väärtusi.

A	B	1	9	3	2	10	4	5	11	6	8	7
A	B	$A \& B$	$A \& \neg B$	$\neg A \& B$	$\neg A \& \neg B$							
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1

Samaselt tõe valemite tõe väärtuste veerg sisaldab ainult väär tõe väärtusi.

Definitsioon

Lausearvutuse valemit F nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene.

- ▶ Iga samaselt tõene valem on ka kehtestatav.
- ▶ Kui valem ei ole kehtestatav, siis ta on samaselt väär.

Seosed valemiklasside vahel

Teoreem

Valem F on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ on samaselt väär.

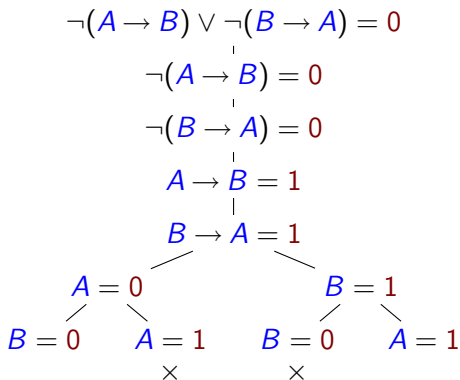
Teoreem

Valem F on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ ei ole samaselt tõene.



- ▶ Puu juureks on uuritav valem koos kontrollitava tõeväärtusega.
- ▶ Tükeldame valemi järkjärgult osadeks, kirjutades osavalemid koos nende tõeväärtustega eelnevate valemite alla.
- ▶ Kui osavalemitele sobivaid tõeväärtusvariante on mitu, siis tekib puus hargnemine.
- ▶ Analüüs on lõppenud, kui igas harus on kas kõik valemid tükeldatud lausemuutujateks (*lõpetatud haru*) või seal esineb mingi valem nii tõesena kui väärana (*vastuoluline haru*).

Teha kindlaks, kas valem $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)$ on samaselt tõene.



Järelikult valem ei ole samaselt tõene, vaid ta on väär väärtustustel $A = 0, B = 0$ ja $A = 1, B = 1$

Tõesuspuu elementaarsammud

- ▶ Eitus:

$$\begin{array}{cc} \neg F = 1 & \neg F = 0 \\ | & | \\ F = 0 & F = 1 \end{array}$$

- ▶ Konjunktsioon ja disjunktsioon:

$$\begin{array}{cccc} F \& G = 1 & F \& G = 0 & F \vee G = 1 & F \vee G = 0 \\ | & / \quad \backslash & / \quad \backslash & / \quad \backslash & | \\ F = 1 & F = 0 \quad G = 0 & F = 1 \quad G = 1 & F = 0 \quad G = 0 & F = 0 \\ | & & & & | \\ G = 1 & & & & G = 0 \end{array}$$

- ▶ Implikatsioon ja ekvivalents:

$$\begin{array}{cccc} F \rightarrow G = 1 & F \rightarrow G = 0 & F \leftrightarrow G = 1 & F \leftrightarrow G = 0 \\ / \quad \backslash & | & / \quad \backslash & / \quad \backslash \\ F = 0 \quad G = 1 & F = 1 & F = 1 \quad F = 0 & F = 1 \quad F = 0 \\ | & | & | & | \\ G = 1 & G = 0 & G = 1 \quad G = 0 & G = 0 \quad G = 1 \end{array}$$

Järeldumine on olukord, kus mingi lause loetakse tõeseks, viidates mingite teiste lausete tõesusele. Järeldumine võib aset leida mitmel põhjusel.

1. Kui täna on 1. märts, siis homme on 2. märts
2. Täna on 1. märts
3. Homme on 2. märts

Lausetest 1 ja 2 järeldub lause 3.

1. Kõik inimesed on Aadama järglased
2. Peeter on inimene
3. Peeter on Aadama järglane

Lausetest 1 ja 2 järeldub samuti lause 3, kuid kõik kolm lauset on lihtlauseid (ja lausearvutuse mõistes üksteisest sõltumatud).

Definitsioon

Ütleme, et valemitest F_1, F_2, \dots, F_n järeldeb valem G , kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel F_1, F_2, \dots, F_n on tõesed, on ka G tõene.

Asjaolu, et valemitest F_1, F_2, \dots, F_n järeldeb valem G , tähistatakse kirjutisega

$$F_1, F_2, \dots, F_n \models G.$$

Järeldumise kontrollimine tõeväärtustabeli abil: valime tõeväärtustabelist välja read, milles valemid F_1, F_2, \dots, F_n on kõik tõesed, ja selgitame, kas nendes ridades on ka valem G tõene.

Teine võimalus on kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem

Valemitest F_1, F_2, \dots, F_n järeldub valem G parajasti siis, kui valem $F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \rightarrow G$ on samaselt tõene.

Tõestada, et valemitest $A \rightarrow B$ ja $B \rightarrow C$ järgeldub valem $A \rightarrow C$.

A	B	C	$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$				
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

On teada järgmised faktid.

- ▶ Kui Mihkel köhib ja on näost valge, siis ta kas on haige või on käinud nurga taga suitsu tegemas.
- ▶ Kui Mihkel pole käinud suitsu tegemas ja ikkagi köhib või on näost valge, siis ta on haige.
- ▶ Kui Mihkel on haige, siis ta köhib, aga pole näost valge.

Pärast vahetundi klassi tulles oli Mihkel näost täiesti valge. Kas sellest järeldub, et ta käis nurga taga suitsu tegemas?

Definitsioon

Valemeid F ja G nimetatakse samaväärseteks, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel.

Tähistatakse $F \equiv G$.

Näiteks valemid $\neg(A \& B)$ ja $\neg A \vee \neg B$ on samaväärsed:

A	B	$\neg(A \& B)$		$\neg A \vee \neg B$	
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

Teoreem

Valemid F ja G on samaväärsed parajasti siis, kui valemist F jäeldub valem G ja valemist G jäeldub valem F .

Teoreem

Valemid F ja G on samaväärsed parajasti siis, kui valem $F \leftrightarrow G$ on samaselt tõene.

Lausearvutuse põhisamaväärsused (I)

1. Idempotentsuse seadused:

$$F \& F \equiv F, \quad F \vee F \equiv F.$$

2. Kommutatiivsuse seadused:

$$F \& G \equiv G \& F, \quad F \vee G \equiv G \vee F.$$

3. Assotsiatiivsuse seadused:

$$(F \& G) \& H \equiv F \& (G \& H), \quad (F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H).$$

4. Distributiivsuse seadused:

$$F \& (G \vee H) \equiv F \& G \vee F \& H, \\ F \vee G \& H \equiv (F \vee G) \& (F \vee H).$$

5. Neelamisseadused:

$$F \& (F \vee G) \equiv F, \quad F \vee F \& G \equiv F.$$

Lausearvutuse põhisamaväärsused (II)

6. De Morgani seadused:

$$\neg(F \& G) \equiv \neg F \vee \neg G, \quad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \& \neg G.$$

7. Kahekordse eituse seadus:

$$\neg\neg F \equiv F.$$

8. Liikmete elimineerimise reeglid:

$$F \& \mathcal{T} \equiv F, \quad F \& \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}, \quad F \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}, \quad F \vee \mathcal{V} \equiv F.$$

9. Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:

$$F \rightarrow G \equiv \neg(F \& \neg G), \quad F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G.$$

10. Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:

$$F \& G \equiv \neg(F \rightarrow \neg G), \quad F \vee G \equiv \neg F \rightarrow G.$$

11. Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu:

$$F \leftrightarrow G \equiv F \& G \vee \neg F \& \neg G, \quad F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F).$$

- ▶ Analoogiliselt algebraga võib lausearvutuse samaväärsusi kasutada lausearvutuse valemite teisendamiseks ja lihtsustamiseks.
- ▶ Üks teisendussamm tähendab valemi või selle osa asendamist temaga samaväärse valemiga.
- ▶ Lausearvutuse valemite teisendamine põhineb **substitutsiooniprintsiibil**: kui valemis F asendada osavalem F_1 temaga samaväärse valemiga F_2 , siis saadav valem F' on samaväärne valemiga F .

Näide. Lihtsustada valem $\neg A \vee B \rightarrow A \& B$.

Normaalkuju on objekti ühtne ja (tavaliselt) lihtne esitusviis, mis võetakse edasise uurimise aluseks.

- ▶ Teoreetilises uurimises kasutatakse normaalkujusid tõestuste lihtsustamiseks: võib eeldada, et uuritav objekt on juba algusest peale normaalkujul.
- ▶ Vajalikke objekte on tihti lihtsam konstrueerida normaalkuju järgi ja teisendada siis sobivale kujule.

- ▶ **Literaali** on lausemuutuja või tema eitus.
- ▶ Puhast lausemuutujat nimetame **positiivseks literaaliks**, eitusega lausemuutujat **negatiivseks literaaliks**. Ühest lausemuutujast saab seega koostada kaks literaali.
- ▶ Näiteks A , B , C on positiivsed literaalid, $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ on negatiivsed literaalid.
- ▶ Lausemuutujateks, millest literaalid koostatakse, on tavaliselt teatava valemi kõigi muutujate hulk.

Täielik elementaarkonjunktsioon

- ▶ Olgu vaatluse all lausemuutujate komplekt A_1, A_2, \dots, A_n .
- ▶ Moodustame igast muutujast literaali (lisades või jättes lisamata eituse): L_1, L_2, \dots, L_n .
- ▶ Valemit

$$L_1 \& L_2 \& \dots \& L_n$$

nimetatakse **täielikuks elementaarkonjunktsiooniks** (TEK).

Näiteks lausemuutujatest A, B, C koostatud valem $A \& \neg B \& \neg C$ on täielik elementaarkonjunktsioon.

Definitsioon

Lausearvutuse valemi F täielikuks disjunkttiivseks normaalkujuks (TDNK) nimetatakse valemiga F samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni.

„Erinevad“ tähendab, et elementaarkonjunktsioonid koosnevad erinevatest literaalikomplektidest.

Näiteks valem

$$A \& B \& \neg C \vee \neg A \& B \& C \vee \neg A \& \neg B \& C$$

on täielikul disjunkttiivsel normaalkujul.

Täielik konjunkttiivne normaalkuju

- ▶ **Täielik elementaardisjunktsioon** (TED) on literaalidest L_1, L_2, \dots, L_n koostatud valem

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n.$$

- ▶ Valemi F **täielik konjunkttiivne normaalkuju** (TKNK) on valemiga F samaväärne valem, mis kujutab endast erinevate täielike elementaardisjunktsioonide konjunksiooni.

Näiteks valem

$$(A \vee B \vee \neg C) \& (\neg A \vee B \vee C) \& (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

on täielikul konjunkttiivsel normaalkujul.

TDNK ja TKNK on teineteisega duaalsed mõisted.

- ▶ Valem

$$A \& \neg B \& \neg C \& D \vee A \& B \& C \& \neg D$$

on tõene parajasti kahel väärtustusel: esimene liige väärtustusel $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$ ja teine liige väärtustusel $A = 1, B = 1, C = 1, D = 0$.

- ▶ Üldiselt, valem

$$A_1^{\alpha_{11}} \& A_2^{\alpha_{12}} \& \dots \& A_n^{\alpha_{1n}} \vee A_1^{\alpha_{21}} \& A_2^{\alpha_{22}} \& \dots \& A_n^{\alpha_{2n}} \vee \dots \\ \dots \vee A_1^{\alpha_{m1}} \& A_2^{\alpha_{m2}} \& \dots \& A_n^{\alpha_{mn}}$$

on tõene parajasti m väärtustusel $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}),$
 $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$.

Valemi F igale tõesele väärtustusele vastab üks TDNK liige.

A	B	C	$A \rightarrow \neg C \leftrightarrow A \& B \vee (\neg A \& C)$						Liige	
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	$A \& B \& \neg C$
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	$A \& \neg B \& C$
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	$\neg A \& B \& C$
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	$\neg A \& \neg B \& C$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	

Valemi TDNK on

$$A \& B \& \neg C \vee A \& \neg B \& C \vee \neg A \& B \& C \vee \neg A \& \neg B \& C.$$

► Valem

$$(A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \& (A \vee B \vee C \vee \neg D)$$

on väär parajasti kahel väärtustusel: esimene liige väärtustusel $A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$ ja teine liige väärtustusel $A = 0, B = 0, C = 0, D = 1$.

► Üldiselt, valem

$$(A_1^{\alpha_{11}} \vee A_2^{\alpha_{12}} \vee \dots \vee A_n^{\alpha_{1n}}) \& (A_1^{\alpha_{21}} \vee A_2^{\alpha_{22}} \vee \dots \vee A_n^{\alpha_{2n}}) \& \dots \\ \dots \& (A_1^{\alpha_{m1}} \vee A_2^{\alpha_{m2}} \vee \dots \vee A_n^{\alpha_{mn}})$$

on väär parajasti m väärtustusel $(\neg\alpha_{11}, \neg\alpha_{12}, \dots, \neg\alpha_{1n}),$
 $(\neg\alpha_{21}, \neg\alpha_{22}, \dots, \neg\alpha_{2n}), \dots, (\neg\alpha_{m1}, \neg\alpha_{m2}, \dots, \neg\alpha_{mn}).$

TKNK leidmine

Valemi F igale väärle väärtustusele vastab üks TKNK liige.
Literaalide märgid on muutujate tõeväärtustega võrreldes vastupidised.

A	B	C	$A \rightarrow \neg C \leftrightarrow A \& B \vee (\neg A \& C)$							Liige
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\neg A \vee B \vee C$
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	$A \vee \neg B \vee C$
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	$A \vee B \vee C$

Valemi TKNK on

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \& (\neg A \vee B \vee C) \& (A \vee \neg B \vee C) \& (A \vee B \vee C)$$

Kui valemi F täielik disjunktiivne normaalkuju on

$$\begin{aligned} F \equiv & L_{11} \& L_{12} \& \dots \& L_{1n} \vee \\ & L_{21} \& L_{22} \& \dots \& L_{2n} \vee \\ & \dots \vee \\ & L_{m1} \& L_{m2} \& \dots \& L_{mn}, \end{aligned}$$

siis valemi $\neg F$ täieliku konjunktiivse normaalkuju saab leida valemist

$$\begin{aligned} \neg F \equiv & (\neg L_{11} \vee \neg L_{12} \vee \dots \vee \neg L_{1n}) \& \\ & (\neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \dots \vee \neg L_{2n}) \& \\ & \dots \& \\ & (\neg L_{m1} \vee \neg L_{m2} \vee \dots \vee \neg L_{mn}), \end{aligned}$$

jättes lausemuutujate eest ära kahekordsed eitused.

Täieliku disjunktiivse normaalkuju olemasolu.

- ▶ Kui valem on kehtestatav, siis tal leidub TDNK, mis on liikmete järjekorra täpsuseni üheselt määratud.
- ▶ Kui valem on samaselt väär, siis tal TDNK-d ei leidu, sest TDNK on alati vähemalt ühel väärtustusel tõene.

Täieliku konjunktiivse normaalkuju olemasolu.

- ▶ Kui valem ei ole samaselt tõene, siis tal leidub TKNK, mis on liikmete järjekorra täpsuseni üheselt määratud.
- ▶ Kui valem on samaselt tõene, siis tal TKNK-d ei leidu, sest TKNK on alati vähemalt ühel väärtustusel väär.

Mõnikord loetakse ühtsuse mõttes, et tühi TDNK on samaselt väär ja tühi TKNK on samaselt tõene.

Üldine normaalkuju on täieliku normaalkujuga võrreldes sageli lühem, samal ajal on valemi tõesuspiirkond (vääruspiirkond) tema järgi ikka lihtsasti välja loetav.

- ▶ Lausemuutujatest A_1, A_2, \dots, A_n moodustatud literaalide konjunktsiooni $L_{i_1} \& L_{i_2} \& \dots \& L_{i_k}$ nimetatakse **elementaarkonjunktsiooniks** ehk **konjunktiks**.
- ▶ Valemiga F samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni, nimetatakse valemi F **disjunkttiivseks normaalkujuks** (DNK).
- ▶ Analoogiliselt defineeritakse **elementaardisjunktsioon** ehk **disjunkt** ning **konjunkttiivne normaalkuju** (KNK).

Võrreldes täieliku normaalkujuga loobutakse siin tingimusest, et normaalkuju iga liige peab sisaldama kõiki lausemuutujaid.

- ▶ Elementaarkonjunktsioon

$$A_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \& A_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \& \dots \& A_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

on tõene parajasti siis, kui $A_{i_1} = \alpha_{i_1}$, $A_{i_2} = \alpha_{i_2}$, \dots , $A_{i_k} = \alpha_{i_k}$.

- ▶ See fikseerib k lausemuutuja väärtused, ülejäänud $n - k$ muutujat võivad olla ükskõik millise väärtusega. Seega on selline elementaarkonjunktsioon tõene 2^{n-k} väärtustusel.
- ▶ DNK erinevad liikmed võivad olla tõesed mingil ühel ja samal väärtustusel. Seetõttu võib valemil leiduda mitu erinevat DNK-d. Näiteks valemi $F = (A \leftrightarrow C) \rightarrow \neg A \& C$ puhul

$$\begin{aligned} F &\equiv A \& C \vee \neg A \& C \vee B \& \neg C \\ &\equiv A \& C \vee \neg A \& B \vee \neg A \& C \end{aligned}$$

Teisendamine DNK-le

Normaalkujule teisendamine võimaldab valemi tõesuspiirkonda analüüsida ka suurema arvu muutujate korral. Lisaks on selline teisendamine lihtsasti automatiseeritav.

Olgu antud valem F . Leiame selle valemi DNK.

1. Elimineerida implikatsioonid ja ekvivalentsid.
2. Viia eitused vahetult lausemuutujate ette.
3. Viia konjunktsioonid disjunktsioonidest sügavamale.
4. Korrastada liikmed.

Kui eesmärgiks on TDNK, siis tuleb liikmed teisendada täielikeks elementaarkonjunktsioonideks.

5. Lisada igale liikmele puuduvad muutujad ja avada sulud.
6. Eemaldada täielike elementaarkonjunktsioonide korduvad eksemplarid.

Konjunktiivne normaalkuju

Konjunktsiooni ja disjunktsiooni duaalsuse põhjal saab eelneva üle kanda KNK-dele, kui vahetada omavahel tehted konjunktsioon ja disjunktsioon ning samuti tõeväärtused tõene ja väär.

- ▶ Elementaardisjunktsioon

$$A_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee A_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \vee \dots \vee A_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

on väär parajasti siis, kui $A_{i_1} = \neg\alpha_{i_1}$, $A_{i_2} = \neg\alpha_{i_2}$, ..., $A_{i_k} = \neg\alpha_{i_k}$.

- ▶ Selline elementaardisjunktsioon on väär 2^{n-k} väärtustusel.
- ▶ Erinevate elementaardisjunktsioonide vääruspiirkonnad võivad kattuda ning valemil võib leida mitu erinevat konjunktiivset normaalkuju.
- ▶ Valemi teisendamisel konjunktiivsele normaalkujule tuleb rakendada disjunktiivse normaalkujuga võrreldes duaalseid samaväärsusi.

Definitsioon

Valemi F minimaalseks disjunktiivseks normaalkujuks (MDNK) nimetatakse valemi F disjunktiivset normaalkuju, mis sisaldab kõige vähem literaale.

Normaalkuju ebaefektiivsuse põhjusi:

- ▶ liikmete kattumine, näiteks

$$A \& \neg B \vee A \& \neg B \& \neg C \equiv A \& \neg B;$$

- ▶ ühilduvad liikmed, näiteks

$$A \& B \& \neg C \vee A \& \neg B \& \neg C \equiv A \& \neg C.$$

Normaalkuju minimeerimise meetodid

Need pole siiski ainsad põhjused, näiteks ei saa nendega leida valemi

$$F = A \& B \vee A \& B \& \neg C \vee A \& \neg B \& C \vee A \& C \vee \neg A \& B \& \neg C$$

minimaalset disjunktivset normaalkuju

$$F \equiv B \& \neg C \vee A \& C.$$

Minimaalse normaalkuju leidmiseks on palju nii algebralisi kui graafilisi meetodeid. Üks sagedamini kasutatavaid on Karnaugh' diagramm (selle algebraline variant kannab nime Quine-McCluskey meetod).

Karnaugh' diagramm

Sobib väiksema muutujate arvuga valemi minimaalse disjunktivse normaalkuju leidmiseks.

Kahe muutujaga tabel:

	B	$\neg B$
A		
$\neg A$		

Kolme muutujaga tabel:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A				
$\neg A$				
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Nelja muutujaga tabel:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A					D
A					$\neg D$
$\neg A$					$\neg D$
$\neg A$					D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Leida valemi $(C \rightarrow A) \& (A \rightarrow \neg B)$ minimaalne disjunktiivne normaalkuju.

Valem on tõene väärtustustel $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$.
Koostame Karnaugh' diagrammi ja märgime vastavad lahtrid:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A			1	1
$\neg A$		1	1	
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Näide

Leida valemi $(C \rightarrow A) \& (A \rightarrow \neg B)$ minimaalne disjunktiivne normaalkuju.

Valem on tõene väärtustustel $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$.
Koostame Karnaugh' diagrammi ja märgime vastavad lahtrid:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$
A			1	1
$\neg A$		1	1	
	C	$\neg C$	$\neg C$	C

Valemi MDNK on $A \& \neg B \vee \neg A \& \neg C$.

Näide 2

Leida järgmise diagrammiga määratud valemi minimaalne disjunktiiivne normaalkuju:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A			1	1	D
A					$\neg D$
$\neg A$				1	$\neg D$
$\neg A$	1		1	1	D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Näide 2

Leida järgmise diagrammiga määratud valemi minimaalne disjunkttiivne normaalkuju:

	B	B	$\neg B$	$\neg B$	
A			1	1	D
A					$\neg D$
$\neg A$				1	$\neg D$
$\neg A$	1		1	1	D
	C	$\neg C$	$\neg C$	C	

Valemi MDNK on

$$\neg B \& D \vee \neg A \& C \& D \vee \neg A \& \neg B \& C.$$