Hulgateooria

Diskreetse matemaatika elemendid

Sügis 2008

Hulgateooria

- 1870. aastad: nn naiivne hulgateooria, G. Cantor.
- 1899-1902: paradoksid hulgateoorias (Cantori paradoks, Russelli paradoks).
- 1908: aksiomaatiline hulgateooria, E. Zermelo
- 1922: hulgateooria aksimaatika täiustamine, A. Fraenkel

Paljudes matemaatika harudes kasutatakse siiamaani naiivset hulgateooriat, ka meie vaatleme seda.

Aksiomaatilist hulgateooriat kasutatakse seal, kus on oluline vältida hulgateoreetilisi paradokse või uurida teatavate matemaatiliste probleemide põhimõttelist lahenduvust/mittelahenduvust.

Hulga mõiste

- **Hulk** on üksteisest erinevate objektide ehk hulga **elementide** kogum, mida vaadeldakse ühe tervikuna.
- Kahte hulka loeme **võrdseteks**, kui nad koosnevad samadest elementidest. Elementide järjestus ega muud elementide omavahelised vahekorrad olulised ei ole.
- Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega A, B, C jne, hulga elemente aga väikeste ladina tähtedega a, b, c jne.
- Kui element a kuulub hulka A, siis kirjutame $a \in A$, vastasel korral $a \notin A$.
- Hulki kirjeldatakse tavaliselt kas elementide loeteluna kujul

$$\{a, b, \ldots\}$$

või moodustamise eeskirja kaudu kujul

$$\{x \ldots\} \qquad \text{või} \qquad \{x \mid \ldots\}$$

Näiteid hulkadest

- Hulk elementidega a, b on $\{a, b\}$.
- Arvuhulgad
  - naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \{q : q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}\}$
  - reaalarvude hulk $\mathbb{R}$
  - kompleksarvude hulk $\mathbb{C} = \{z : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
- Intervallid
  - lõik $[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$
  - vahemik $(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
  - poollõik $[a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$
  - poollõik $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$
- Tühi hulk $\emptyset$: hulk, milles pole ühtegi elementi
- Kas kõigi hulkade hulk on hulk?

Alamhulk

Definitsioon

*Hulka A nimetatakse hulga B **alamhulgaks** ehk **osahulgaks**, kui kõik hulga A elemendid kuuluvad ka hulka B.*

Tähistatakse $A \subseteq B$ või $A \subset B$ või $B \supseteq A$ või $B \supset A$.

Ülaltoodud definitsioonis esinevat hulka B nimetatakse ka hulga A **ülemhulgaks**.

Hulga A kõigi alamhulkade hulka tähistatakse $\mathcal{P}(A)$.

Definitsioon

*Hulka A nimetatakse hulga B **pärisalamhulgaks**, kui hulk A on hulga B alamhulk ja $A \neq B$.*

Näited

- Hulgal $\{a\}$ on järgmised alamhulgad: $\emptyset$, $\{a\}$.
- Hulgal $\{a, b\}$ on järgmised alamhulgad: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Üldiselt, kui hulgas on n elementi, siis hulgal on 2^n alamhulka.
- Tühi hulk $\emptyset$ on iga hulga alamhulk (sealhulgas ka tühja hulga enda).
- Arvuhulkade vahel kehtivad sisalduvused $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Alamhulkade omadused

Hulkade sisalduvusseosel $\subseteq$ on järgmised põhiomadused.

1. **Refleksiivsus**: iga hulga A korral $A \subseteq A$
2. **Antisümmeetrilisus**: kui $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$, siis $A = B$
3. **Transitiivsus**: kui $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$, siis $A \subseteq C$

Antisümmeetrilisuse omadust kasutatakse sageli siis, kui on vaja tõestada, et kaks hulka on võrdsed.

Hulkade ühend

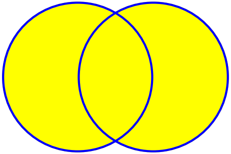
- Kahe hulga A ja B **ühendiks** nimetatakse hulka $A \cup B$, mis koosneb nii hulga A kui ka hulga B elementidest:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ või } x \in B\}$$

- Mitme hulga A_α, kus $\alpha \in A$, ühend

$$\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$$

  koosneb kõigist niisugustest elementidest, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A_α.
- Venni diagramm



Näited

- Kui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{1, 3, 5, 7\}$, siis $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.
- Kui $A_i = [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$, kus $i \in \mathbb{Z}$, siis $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
- Kui $A_{a,b} = (a, b)$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$, siis $\bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} A_{a,b} = \mathbb{R}$.
- Kõikide hulkade A ja B korral $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$.
- Iga hulga A korral $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$.

Hulkade ühisosa

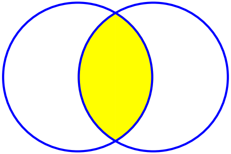
- Kahe hulga A ja B **ühisosaks** nimetatakse hulka $A \cap B$, mis koosneb hulkade A ja B ühistest elementidest:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$$

- Mitme hulga A_α, kus $\alpha \in A$, ühisosa

$$\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$$

  koosneb kõigist niisugustest elementidest, mis kuuluvad igaühte hulkadest A_α.
- Venni diagramm



Näiteid

- Kui $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, siis $A \cap B = \{1, 3\}$.
- Kui $A_n = (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} = \{0\}$
- Kui $A_n = (0, \frac{1}{n+1})$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$
- Kõikide hulkade A ja B korral $A \cap B \subseteq A$ ja $A \cap B \subseteq B$.

Ühendi ja ühisosa omadused

- Idempotentsus:

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$$

- Kommutatiivsus:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

- Assotsiatiivsus

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Distributiivsus

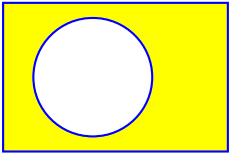
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Neelduvus

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

Hulga täiend

- Tihti on käsitluses fikseeritud teatav hulk X ja kõik vaadeldavad hulgad on selle hulga alamhulgad. Sellisel juhul nimetatakse hulka X **universaalseks**. Nt võib universaalse hulga rollis olla kõigi reaalarvude hulk, tasandi kõigi punktide hulk jne
- Olgu fikseeritud teatav universaalhulk X. Hulga A täiendiks nimetatakse kõigi nende hulga X elementide hulka A', mis ei kuulu hulka A:
$$A' = \{x : x \notin A\}.$$
- Venni diagramm



Täiendi omadused

- De Morgani seadused

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

- Kahekordse täiendi seadus

$$A'' = A$$

- Universaalse hulga ja tühja hulga reeglid

$$\begin{aligned} \emptyset' &= X, & X' &= \emptyset, \\ A \cup A' &= X, & A \cap A' &= \emptyset \end{aligned}$$

Muud hulgateoreetilised tehted

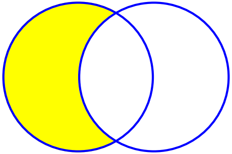
- Kahe hulga A ja B **vaheks** nimetatakse hulka $A \setminus B$, mis koosneb kõigist niisugustest elementidest, mis kuuluvad hulka A, aga ei kuulu hulka B:

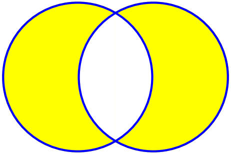
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

- Kahe hulga A ja B **sümmeetriliseks vaheks** nimetatakse hulka $A \triangle B$, mis koosneb kõigist elementidest, mis kuuluvad kas hulka A või hulka B, aga mitte mõlemasse korraga:

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \text{ ja } x \notin B) \text{ või } (x \notin A \text{ ja } x \in B)\}$$

- Venni diagrammid





Sümmeetrilise vahe omadusi

- Kommutatiivsus
$$A \triangle B = B \triangle A$$
- Assotsiatiivsus
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$
- Distributiivsus ühisosaga
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$
- Seos teiste tehetega
$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Hulgateooria tehete seos lausearvutuse tehetega

Olgu X universaalne hulk ja $A, B \subseteq X$. Peale selle olgu $x \in X$.

Toome sisse lausemuutujad

$$\begin{aligned} A: &\quad x \in A \\ B: &\quad x \in B \end{aligned}$$

Siis

- Väitele $x \in A \cup B$ vastab valem $A \vee B$
- Väitele $x \in A \cap B$ vastab valem $A \,\&\, B$
- Väitele $x \notin A$ vastab valem $\neg A$

Milline valem vastab väitele $x \in A \setminus B$? Milline väide vastab valemile $A \to B$?

Hulkade otsekorrutis

- Kahe hulga A ja B **otsekorrutiseks** nimetatakse hulka $A \times B$, mis koosneb kõigist järjestatud paaridest (x, y), kus $x \in A$ ja $y \in B$:
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ja } y \in B\}$$
- Paarides on elementide järjekord oluline.
- Lõpliku arvu hulkade A_1, ..., A_n otsekorrutis
$$A_1 \times \ldots \times A_n$$
koosneb kõigist järjestatud n-elemendilistest komplektidest $(x_1, \ldots, x_n)$, kus $x_1 \in A_1$, ..., $x_n \in A_n$.
- Järjestatud n-elemendilisi komplekte nimetatakse **korteežideks** või **vektoriteks**.

Näited

- Kui $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{a, b\}$, siis
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$
- Kui $A = B = [0, 1]$, siis otsekorrutist $A \times B$ võib kujutada tasandi ühikruuduna.
- Kui $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ja $B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, siis otsekorrutist $A \times B$ võib vaadelda kui malelaua ruutude hulka.

Otseaste

- Otsekorrutist $A \times A$ nimetatakse hulga A **otseruuduks** ja tähistatakse A^2.
- Üldiselt, otsekorrutist $A \times \ldots \times A$, kus hulk A esineb n korda, nimetatakse hulga A n-daks **otseastmeks** ja tähistatakse A^n.

Näiteks:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esitab tasandi kõigi punktide hulka
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esitab ruumi kõigi punktide hulka
- $\mathbb{R}^n$ esitab n-mõõtmelise ruumi kõigi punktide hulka

Otsekorrutise omadusi

- Otsekorrutis tühja hulgaga:

$$A \times \emptyset = \emptyset, \qquad \emptyset \times A = \emptyset$$

- Distributiivsus:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

Funktsioon

Definitsioon

*Eeskirja f, mis seab hulga A igale elemendile vastavusse hulga B elemendi, nimetatakse **funktsiooniks** hulgast A hulka B. Tähistatakse $f : A \to B$.*

- Kui funktsioon f seab elemendile $x \in A$ vastavusse elemendi $y \in B$, siis kirjutatakse $y = f(x)$ või $y = fx$ või $f : x \mapsto y$. Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x **kujutiseks**, elementi x nimetatakse elemendi y **originaaliks**.
- Definitsioonis esinevat hulka A nimetatakse funktsiooni **määramispiirkonnaks**. Hulga A kõigi elementide kujutiste hulka nimetatakse funktsiooni **väärtuste piirkonnaks**. Funktsiooni väärtuste piirkond kuulub hulka B.

Näited

- Koolimatemaatikast tuntud funktsioonid, nt lineaarne funktsioon $y = ax + b$, ruutfunktsioon $y = x^2$, trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$ jne on kõik funktsioonid reaalarvude hulgast reaalarvude hulka: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Funktsioon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mis seab reaalarvupaarile (x, y) vastavusse reaalarvu $x^2 + y^2$.
- Funktsioon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ esitab reaalarvuliste liikmetega jada.
- Samasusfunktsioon $f : A \to A$, mis hulga A igale elemendile x seab vastavusse elemendi x enda.
- Konstantne funktsioon $f : A \to B$, mis hulga A igale elemendile x seab vastavusse ühe ja sama elemendi c hulgast B.

Hulga kujutis ja originaal

Olgu antud funktsioon $f : A \to B$.

- Hulga $U \subseteq A$ kujutiseks nimetatakse hulka

$$f(U) = \{y \in B : \text{leidub } x \in U, \text{ et } y = f(x)\}$$

- Hulga $V \subseteq B$ originaaliks nimetatakse hulka

$$f^{-1}(V) = \{x \in A : f(x) \in V\}$$

Näiteks

- $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\ln((0, 1)) = (-\infty, 0)$
- $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\ln^{-1}([0, 1]) = [0, e]$.

Hulga kujutise ja originaali omadused

Kujutis	Originaal
$f(\emptyset) = \emptyset$, $f(A) \subseteq B$	$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(B) = A$
kui $U_1 \subseteq U_2$, siis $f(U_1) \subseteq f(U_2)$	kui $V_1 \subseteq V_2$, siis $f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$
$f(\cup_\alpha U_\alpha) = \cup_\alpha f(U_\alpha)$	$f^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$
$f(\cap_\alpha U_\alpha) \subseteq \cap_\alpha f(U_\alpha)$	$f^{-1}(\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$
	$f^{-1}(B \setminus V) = A \setminus f^{-1}(V_\alpha)$

Järjestikune rakendamine:

$$\text{Kui } U \subseteq A, \text{ siis } U \subseteq f^{-1}(f(U))$$
$$\text{Kui } V \subseteq B, \text{ siis } f(f^{-1}(V)) \subseteq V$$

Funktsioonide liigid

Funktsiooni $f\colon A \to B$ nimetatakse

- **injektiivseks** ehk **üksüheseks**, kui iga elemendipaari x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ korral $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **sürjektiivseks** ehk **pealekujutuseks**, kui igal elemendil hulgast B leidub originaal
- **bijektiivseks** ehk **üksüheseks vastavuseks**, kui funktsioon on korraga injektiivne ja sürjektiivne

Injektiivne funktsioon on selline, kus ühelgi elemendil hulgast B ei ole üle ühe originaali. Bijektiivne funktsioon on selline, kus igale elemendil hulgast B leidub täpselt üks originaal.

Näiteid

- Funktsioon $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektiivne ega sürjektiivne.
- Funktsioon $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ on injektiivne, aga mitte sürjektiivne.
- Funktsioon $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on sürjektiivne, aga mitte injektiivne.
- Funktsioon $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ on injektiivne ja sürjektiivne (ehk bijektiivne).

Funktsiooni graafik

- Vaatleme funktsiooni $f : A \to B$. Hulka
$$\{(x, f(x)) : x \in X\}$$
nimetatakse funktsiooni f **graafikuks** ja tähistatakse $G(f)$.
- Graafik $G(f)$ kuulub hulka $A \times B$.
- Hulk $C \subseteq A \times B$ on mingi funktsiooni graafik parajasti siis, kui kehtivad tingimused
  1. iga $x \in A$ korral leidub $y \in B$, et $(x, y) \in C$ (igale elemendile hulgast A peab vastama mingi element hulgast B)
  2. alati, kui $(x, y_1) \in G$ ja $(x, y_2) \in G$, siis $y_1 = y_2$ (ühelegi elemendile hulgast A ei vasta kahte erinevat elementi hulgast B)

Funktsioonide kompositsioon

Definitsioon

Funktsioonide $f : A \to B$ *ja* $g : B \to C$ ***kompositsiooniks*** *ehk* ***liitfunktsiooniks*** *nimetatakse funktsiooni* $gf : A \to C$, *mis defineeritakse tingimusega*

$$\text{iga } x \in A \text{ korral} \qquad (gf)(x) = g(f(x))$$

Kompositsiooni omadusi.

- Kompositsioon on assotsiatiivne: $h(gf) = (hg)f$.
- Kui f ja g on injektiivsed (sürjektiivsed, bijektiivsed), siis gf on injektiivne (sürjektiivne, bijektiivne).

Pöördfunktsioon

Definitsioon

Bijektiivse funktsiooni $f\colon A \to B$ ***pöördfunktsioon*** *on funktsioon $f^{-1}\colon B \to A$ seab igale elemendile $y \in B$ vastavusse selle elemendi $x \in A$, mille korral $f(x) = y$. St $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.*

Pöördfunktsiooni omadusi.

- Kui funktsioonide $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to A$ puhul $gf = I$ ja $fg = I$, siis leidub f^{-1} ja $f^{-1} = g$.
- Kui funktsioonil $f\colon A \to B$ leidub pöördfunktsioon f^{-1}, siis ka funktsioonil f^{-1} leidub pöördfunktsioon ja $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Kui funktsioonidel $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ leiduvad pöördfunktsioonid, siis ka funktsioonil $gf : A \to C$ leidub pöördfunktsioon ja $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Hulga karakteristlik funktsioon

Definitsioon

Olgu X universaalne hulk. Hulga $A \subseteq X$ ***karakteristlikuks funktsiooniks*** *nimetatakse funktsiooni $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$, kus*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{kui } x \in A \\ 0, & \textit{kui } x \notin A \end{cases}$$

Hulgateoreetilised tehted karakteristlike funktsioonide kaudu:

- $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x)\chi_B(x)$
- $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
- $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$
- $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \times \chi_B(y)$

Hulga võimsus

- Lõpliku hulga võimsus on tema elementide arv.
- Lõpmatute hulkade võimsuste võrdlemiseks kasutame hulkade üksühese vastavuse (bijektsiooni) mõistet.

Definitsioon

Ütleme, et hulgad A ja B on ***sama võimsusega****, kui leidub bijektsioon $f : A \to B$.*

Tähis: $A \sim B$, öeldakse ka, et hulgad A ja B on ekvivalentsed.

Kehtivad omadused

- refleksiivsus: $A \sim A$
- sümmeetrilisus: kui $A \sim B$, siis $B \sim A$
- transitiivsus: kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$

Näited

- Naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ja tema alamhulk, mis koosneb parajasti kõigist paarisarvudest, on sama võimsusega.
- Hulgad $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ on sama võimsusega.
- Reaalarvude hulgad $[a, b]$ ja $[c, d]$ on sama võimsusega.
- Vahemik (a, b) ja hulk $\mathbb{R}$ on sama võimsusega.

Loenduv hulk

Definitsioon

Hulka, mis on sama võimsusega nagu naturaalarvude hulk, nimetatakse ***loenduvaks hulgaks****.*

- Järelikult on loenduvad parajasti need hulgad, mis on esitatavad jadana $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$.
- Iga lõpmatu hulk sisaldab loenduvat osahulka.
- Loenduva hulga iga lõpmatu osahulk on samuti loenduv.

Hotellikülastajad

Hotellis Interstellar Galaxy on loenduv hulk tube, kõik hõivatud.
Kas on võimalik ära paigutada

- üks uus külastaja?

Hotellikülastajad

Hotellis Interstellar Galaxy on loenduv hulk tube, kõik hõivatud.
Kas on võimalik ära paigutada

- üks uus külastaja?
- 20 uut külastajat?

Hotellikülastajad

Hotellis Interstellar Galaxy on loenduv hulk tube, kõik hõivatud. Kas on võimalik ära paigutada

- üks uus külastaja?
- 20 uut külastajat?
- loenduv hulk külastajaid?

Hotellikülastajad

Hotellis Interstellar Galaxy on loenduv hulk tube, kõik hõivatud.
Kas on võimalik ära paigutada

- üks uus külastaja?
- 20 uut külastajat?
- loenduv hulk külastajaid?
- külastajad, kes saabuvad rongiga, kus on loenduv hulk vaguneid, igas vagunis loenduv hulk reisijaid?

Hotellikülastajad

Hotellis Interstellar Galaxy on loenduv hulk tube, kõik hõivatud. Kas on võimalik ära paigutada

- üks uus külastaja?
- 20 uut külastajat?
- loenduv hulk külastajaid?
- külastajad, kes saabuvad rongiga, kus on loenduv hulk vaguneid, igas vagunis loenduv hulk reisijaid?
- külastajad, kes saabuvad loenduva hulga niisuguste rongidega?

Loenduvate hulkade omadused

1. Loenduva hulga ja lõpliku hulga ühend on loenduv.
2. Kahe loenduva hulga ühend on loenduv.
3. Lõpliku hulga loenduvate hulkade ühend on loenduv.
4. Loenduva hulga paarikaupa erinevate lõplike hulkade ühend on loenduv.
5. Loenduva hulga loenduvate hulkade ühend on loenduv.

Näiteks:

- ratsionaalarvude hulk on loenduv
- kahe-, kolme jne mõõtmelise ruumi ratsionaalarvuliste koordinaatidega punktide hulk on loenduv
- ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk on loenduv

Cantor-Bernsteini teoreem

Definitsioon

Ütleme, et hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust, kui leidub injektsioon $f: A \to B$.

Teoreem

(Cantor-Bernsteini teoreem.) Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ja hulga B võimsus ei ületa, hulga A võimsust, siis hulgad A ja B on sama võimsusega.

Teoreemi teine sõnastusvariant. Kui $A \subseteq B \subseteq C$ ja $A \sim C$, siis $A \sim B \sim C$.

Näiteid Cantor-Bernsteini teoreemi rakendamisest

- Vahemik (a, b) ja lõik $[a, b]$ on sama võimsusega, sest $(a, b) \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ ja $(a, b) \sim \mathbb{R}$.
- Samuti $(a, b] \sim [a, b) \sim (a, b)$.
- Hulgad $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ on sama võimsusega.
- Üldiselt, hulgad $\mathbb{R}^n$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ on kõik sama võimsusega.

Cantori diagonaalmeetod

Teoreem

Hulgad $\mathbb{N}$ *ja* $(0,1)$ *ei ole ekvivalentsed.*

Tõestuse idee. Kui saaksime hulga $(0,1)$ elemendid kirjutada jadana

$$\begin{array}{c} 0{,}\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1j}\ldots \\ 0{,}\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2j}\ldots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0{,}\alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{ij}\ldots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

siis saame moodustada arvu $0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_j\ldots$, kus $\beta_1 \neq \alpha_{11}$, $\beta_2 \neq \alpha_{22}$, ..., $\beta_j \neq \alpha_{jj}$, ... See arv erineb kõigist varem kirjapandud arvudest.

Alamhulkade hulga võimsus

Definitsioon

Ütleme, et hulga A võimsus on väiksem hulga B võimsusest, kui A võimsus ei ületa B võimsust, aga A ja B ei ole ekvivalentsed.

Teoreem

Hulga $P(A)$ võimsus on suurem kui hulga A võimsus.

Tõestuse idee. Kui leiduks bijektsioon $f : A \to P(A)$, siis defineerime hulga

$$B = \{x : x \notin f(x)\}$$

Olgu b selline element, et $f(b) = B$.

- Kui eeldada, et $b \in B$, siis $b \notin f(b)$ ehk $b \notin B$.
- Kui eeldada, et $b \notin B$, siis $b \in f(b)$ ehk $b \in B$.

Mõlemal juhul vastuolu.

Naturaalarvude hulga alamhulkade hulga võimsus

Teoreem

Naturaalarvude hulga alamhulkade hulk on sama võimsusega nagu reaalarvude hulk, st $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$*.*

Tõestuse idee. Piisab tõestada, et $P(\mathbb{N}) \sim [0, 1)$.

a) Naturaalarvude hulga igale alamhulgale A seame vastavusse reaalarvu $0{,}i_0 i_1 i_2 \ldots$, kus $i_k = 1$ või $i_k = 0$ vastavalt sellele, kas $k \in A$ või $k \notin A$.

b) Reaalarvule $x \in [0, 1)$ seame vastavusse alamhulga, mis sisaldab / ei sisalda elementi k vastavalt sellele, kas lõigu $[0, 1)$ k-ndal pooleksjagamisel jääb arv x esimesse või teise poolde.

Võimsuste hierarhia

- Loenduva hulga võimsust tähistatakse $\aleph_0$.
- Reaalarvude hulga võimsust tähistatakse $\aleph_1$ või c. Seda nimetatakse ka kontiinumi võimsuseks.
- Vastavalt Cantori teoreemile on hulgad $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, ... järjest suurenevate võimsustega hulgad.
- Nende hulkade ühend

  $$M = \mathbb{N} \cup P(\mathbb{N}) \cup P(P(\mathbb{N})) \cup \dots$$

  on veelgi suurema võimsusega.
- Hulgad M, $P(M)$, $P(P(M))$, ... on jällegi järjest suurenevate võimsustega hulgad jne.

Kontiinumihüpotees

Kas loenduva hulga võimsuse $\aleph_0$ ja reaalarvude hulga võimsuse (kontiinumi võimsuse) $\aleph_1$ vahel leidub veel võimsusi?

Kontiinumihüpotees väidab, et vahepealseid võimsusi ei ole.

- 1939 tõestas Austria matemaatik Kurt Gödel, et kontiinumihüpoteesi eitus (vahepealsete võimsuste olemasolu) ei järeldu hulgateooria aksioomidest (Zermelo-Fraenkeli aksioomid + valikuaksioom).
- 1963 tõestas Ameerika matemaatik Paul Cohen, et kontiinumihüpotees (vahepealsete võimsuste puudumine) ei järeldu hulgateooria aksioomidest.

Seega kontiinumihüpotees on hulgateooria muudest aksioomidest sõltumatu.